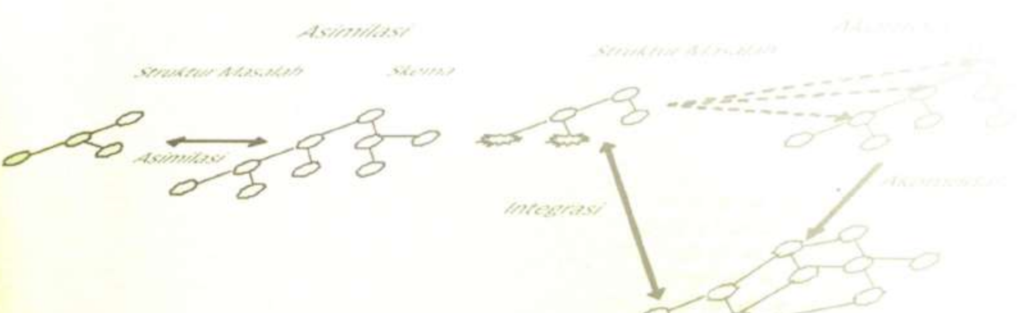
Dr. Subanji, M.Si.

TEORI

KESALAHAN KONSTRUKSI KONSEP DAN PEMECAHAN MASALAH MATEMATIKA



Penyunting: Prof. Dr. Toto Nusantara, M. Si.

UNIVERSITAS NEGERI MALANG
PENERBIT & PERCETAKAN

TEORI KESALAHAN KONSTRUKSI KONSEP DAN PEMECAHAN MASALAH MATEMATIKA

TEORI KESALAHAN KONSTRUKSI KONSEP DAN PEMECAHAN MASALAH MATEMATIKA

Dr. Subanji, M.Si.

UNIVERSITAS NEGERI MALANG
d/h IKIP Malang, IKAPI No. 059/JTI/89
Jl. Semarang 5, (Jl. Gombong 1) Malang, Kode Pos 65145
Kotak Pos 13, MLG/IKIP Telepon (0341)553959, 562391, 551312
(4 saluran) psw. 453; faks. (0341) 566025
E-mail: penerbit@malang.ac.id

Subanji

Teori Kesalahan Konstruksi Konsep dan Pemecahan Masalah Matematika – Oleh: Dr. Subanji, M.Si.– Cet. I, –, Malang: Universitas Negeri Malang, 2015.

Viii, 140 hlm; 23 cm

ISBN: 978.979.495.796.7

- **Teori Kesalahan Konstruksi Konsep dan Pemecahan Masalah Matematika**
  Dr. Subanji, M.Si.

- **Penyunting** : Prof. Dr. Toto Nusantara, M.Si.
  Lay-out : Taufiq Hidayanto
  Cover : Taufiq Hidayanto

- Diterbitkan oleh:
  UNIVERSITAS NEGERI MALANG
  d/h IKIP Malang, IKAPI No. 059/JTI/89
  Jl. Semarang 5, (Jl. Gombong 1) Malang, Kode Pos 65145
  Kotak Pos 13, MLG/IKIP Telepon (0341)553959, 562391, 551312
  (4 saluran) psw. 453; faks. (0341) 566025
  E-mail: penerbit@malang.ac.id

- Cetakan I : 2015

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah. Puji syukur ke hadirat Allah SWT, yang telah melimpahkan Rahmad dan Hidayah Nya, sehingga buku "Teori Kesalahan Konstruksi Konsep dan Pemecahan Masalah Matematika" ini dapat diselesaikan.

Buku ini memuat tujuh Bab. Bab 1: Pengantar Teori Kesalahan Konstruksi. Bab 2: Analisis Masalah dan Kerangka Konseptual Teori Kesalahan Konstruksi. Bab 3: Metode Penelitian memuat proses penelitian kesalahan konstruksi. Bab 4: Karakteristik Kesalahan Siswa dalam Mengonstruksi Konsep Matematika. Bab 5: Teori Kesalahan Konstruksi Konsep Matematika. Bab 6: Kesalahan Konstruksi dalam Pemecahan Masalah Matematika. Bab 7: Ringkasan dan Diskusi.

Buku Teori Kesalahan Konstruksi Konsep Matematika ini bisa dijadikan sebagai referensi bagi peneliti terutama dosen, guru, dan mahasiswa yang menekuni penelitian kualitatif proses berpikir matematik. Penelitian proses berpikir dalam mengonstruksi dan memecahkan masalah matematika masih relatif sedikit, karena itu masih terbuka peluang untuk mengembangkannya. Buku ini juga dapat dimanfaatkan sebagai salah satu sumber belajar **Mata Kuliah Metodologi Penelitian Pendidikan Matematika**.

Kami menyadari bahwa kajian dalam buku ini masih sangat terbatas dan mungkin ada kekurangan-kekurangan yang tentunya perlu diperbaiki. Karena itu kami sangat mengharapkan adanya kritik dan saran dari semua pihak untuk perbaikan pada cetakan berikutnya.

Malang, 2015

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I
PENGANTAR TEORI KESALAHAN KONSTRUKSI

A. Konstruksi Konsep dalam Belajar Matematika

Hal yang sangat menarik dalam belajar matematika adalah bagaimana siswa mengonstruksi konsep matematika dan membangun pengetahuan melalui pengaitan satu konsep dengan konsep lain. Proses membangun pengetahuan dalam konteks belajar matematika dilakukan secara terus menerus sehingga menjadi pengetahuan bagi pebelajar. Pengetahuan yang terbentuk dapat digunakan untuk membangun konsep baru atau digunakan untuk memecahkan masalah yang dihadapi. Karena itu dalam belajar matematika memerlukan pengetahuan awal sebagai "modal" untuk membangun konsep baru. Dalam hal ini belajar harus bermakna (Ausubel dalam Subanji, 2013), artinya dalam belajar matematika senantiasa ada proses mengaitkan pengetahuan lama dengan pengetahuan baru.

Belajar adalah proses aktif siswa dalam mengonstruksi pengetahuan, artinya pengetahuan akan terbentuk apabila siswa melakukan proses konstruksi secara aktif. Pengetahuan pada siswa bukan karena dibentuk oleh guru, namun siswa sendiri yang bisa membentuknya. Peran guru adalah memotivasi, memfasilitasi, memberi stimulus, dan menciptakan lingkungan untuk siswa sehingga siswa bisa belajar. Guru juga perlu senantiasa memberi tantangan kepada siswa agar siswa aktif belajar. Pemberian tantangan menjadi hal penting untuk menimbulkan disequlibrasi, sehingga bisa berlangsung asimilasi dan akomodasi.

Dalam proses belajar, seseorang akan berinteraksi dengan sumber belajar dan akan terjadi proses adaptasi.

Pada saat beradaptasi, seseorang mengalami dua proses kognitif, yaitu asimilasi dan akomodasi. Asimilasi merupakan proses pengintegrasian stimulus baru ke dalam skema yang sudah terbentuk. Menurut Piaget (Subanji, 2011), *assimilation is the incorporation of new events into intelligence as a scheme or concept*. Dalam proses asimilasi, stimulus diinterpretasikan oleh seseorang berdasarkan skema yang dimilikinya. Dalam hal ini, asimilasi merupakan proses pengintegrasian stimulus oleh seseorang ke dalam skema yang sudah dimilikinya.

Akomodasi merupakan proses pengintegrasian stimulus baru melalui pembentukan skema baru atau pengubahan skema lama untuk menyesuaikan dengan stimulus yang diterima. Piaget (Subanji, 2011) menegaskan bahwa dalam *accommodation, existing schemes are modified to account for new information*. Dalam proses pemecahan masalah, siswa dihadapkan pada tantangan yang menimbulkan rasa penasaran untuk menyelesaikannya. Rasa penasaran tersebut menunjukkan adanya ketidakseimbangan antara asimilasi dan akomodasi yang disebut dengan *disequilibrasi*. Dengan tantangan yang menimbulkan rasa penasaran, akan berlangsung proses berpikir menuju keseimbangan yang disebut *equilibrium*. Selama proses belajar, siswa senantiasa mengalami proses asimilasi, akomodasi, disequilibrasi, atau equilibrasi, sedemikian hingga struktur berpikirnya berkembang menjadi lebih kompleks.

Meskipun telah mengemukakan tentang asimilasi dan akomodasi, namun Piaget tidak menjelaskan lebih jauh bagaimana proses asimilasi dan akomodasi itu terjadi. Subanji (2007) memperjelas proses asimilasi dan akomodasi dengan mengilustrasikan dalam bentuk diagram seperti Diagram 1.1.

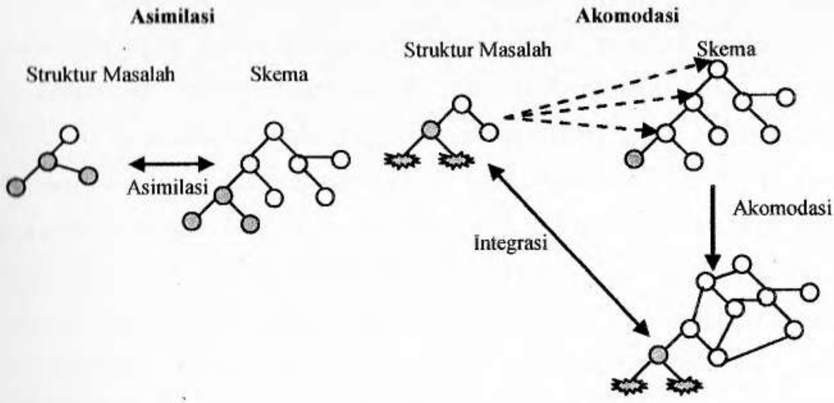


Diagram 1.1. Terjadinya Proses Asimilasi dan Akomodasi

⟷ Menyatakan kesesuaian antara struktur masalah dan skema yang dimiliki

- - - - ▸ Menyatakan ketidaksesuaian antara struktur masalah dan skema yang dimiliki

Subanji (2011) mengungkapkan seperti berikut:

> *Pada proses asimilasi, struktur masalah sudah sesuai dengan struktur berpikir (skema) yang dimiliki oleh seseorang. Sehingga stimulus tersebut dapat diinterpretasi secara langsung oleh orang tersebut. Dalam hal ini terjadi pengintegrasian stimulus ke dalam skema yang sudah dimiliki. Ketika struktur masalah belum sesuai dengan skema yang dimiliki, maka akan terjadi proses modifikasi skema lama atau pembentukan skema baru sehingga struktur masalah dapat diintegrasi ke skemanya. Dalam proses pemecahan masalah, kedua proses, asimilasi dan akomodasi bisa terjadi secara bersama-sama.*

Dalam proses belajar, proses akomodasi menjadi hal yang sangat penting, karena dalam proses tersebut siswa akan mengubah atau membentuk skema baru sehingga struktur berpikirnya menjadi lebih lengkap. Bagaimana siswa mengonstruksi pengetahuan, menjadi hal penting dalam teori belajar. Salah satu pandangan tentang bagaimana siswa belajar, khususnya mengonstruksi pengetahuan adalah *Teori Konstruktivisme*. Konstruktivisme merupakan sebuah teori yang mempelajari bagaimana seseorang belajar. Teori ini lebih memandang bagaimana belajar itu berlangsung. Suatu saat siswa bisa secara optimal mengonstruksi pengetahuan (disebut siswa konstruktif), pada saat yang lain tidak konstruktif. Karena itu belajar hafalanpun juga merupakan sebuah konstruksi (Subanji, 2013), tetapi "konstruksi yang lemah". Bahkan bisa jauh dari "titik-titik" matematis yang berguna untuk konstruksi pemahaman.

Lebih lanjut (Subanji, 2013) menjelaskan bahwa proses berpikir dalam konteks *pemahaman* merupakan ukuran kualitas dan kuantitas hubungan suatu ide dengan ide yang telah ada (dimiliki). Pemahaman sangat bergantung pada ide yang dimiliki dan kualitas hubungan antar ide tersebut. Salah satu cara untuk memikirkan pemahaman individu adalah bahwa pemahaman itu berada di atas garis kontinyu. Puncak pemahaman berisi hubungan yang sangat banyak antar ide. Ide yang dipahami dihubungkan dengan banyak ide yang lain oleh jaringan konsep dan prosedur yang bermakna. Dua titik ujung tersebut oleh Skem (dalam Kennedy, 2008) dinamai pemahaman relasional (*relational understanding*) dan pemahaman instrumental (*instrumental understanding*). Pemahaman relasional merupakan jaringan ide yang kaya, terkait satu ide dengan ide yang lain secara bermakna. Sedangkan pemahaman instrumental merupakan jaringan ide yang terpisah-pisah tanpa makna. Pengetahuan yang diperoleh dengan hafalan berada pada pemahaman instrumental, karena terbentuk dari proses konstruksi yang terpisah-pisah tanpa makna.

Sesuai dengan Teori Konstruktivisme, mengajar bukanlah soal menstransfer informasi kepada siswa dan bahwa belajar bukanlah secara pasif menyerap informasi dari buku atau guru. Sebaliknya guru harus membantu siswanya mengonstruksi ide mereka sendiri dengan menggunakan ide-ide yang telah mereka miliki. Ada tiga faktor yang dapat digunakan untuk mengembangkan pembelajaran di kelas, yakni: (1) mengondisikan berpikir reflektif siswa, (2) menciptakan interaksi sosial antar siswa dan siswa-guru, dan (3) menggunakan model atau alat-alat untuk belajar.

Berpikir reflektif adalah kegiatan aktif untuk menjelaskan sesuatu atau mencoba menghubungkan ide-ide yang terkait. Berpikir reflektif terjadi ketika siswa mencoba memahami penjelasan dari orang lain, ketika mereka bertanya, ketika mereka menjelaskan atau menyelidiki kebenaran ide mereka sendiri. Siswa tidak bisa disuruh berpikir dan mengharapkan mereka memikirkan ide baru. Karena itu guru harus berperan bagaimana melibatkan siswa untuk berpikir. Dalam hal ini, penting untuk melibatkan siswa dalam memecahkan masalah menggunakan ide-ide yang mereka miliki dan membuat ide-ide baru.

Untuk meningkatkan kegiatan berpikir reflektif, siswa perlu dilibatkan dengan pekerjaan temannya. Interaksi yang banyak di dalam kelas akan dapat meningkatkan peluang terjadinya berpikir reflektif yang produktif. Perlunya proses interaksi antar siswa ini dijelaskan oleh Vygotsky (dalam Subanji, 2013) bahwa interaksi sosial sebagai komponen penting dalam pengembangan pengetahuan. Proses berpikir terjadi ketika ada interaksi sosial antar siswa, sehingga terjadi proses saling bertukar ide dan mengembangkan ide. Lebih jauh Vygotsky menjelaskan bahwa ide-ide yang berada di kelas, yang berada di buku, dan yang ada di pikiran guru bisa berbeda dengan ide-ide yang dikonstruksi oleh anak. Ide-ide yang diformulasikan dengan baik yang datangnya dari luar dinamakan konsep-konsep ilmiah. Sedangkan ide-ide yang dikembangkan oleh anak disebut sebagai konsep-konsep spontan. Perbedaan konsep spontan dengan konsep ilmiah menjadi salah satu bentuk munculnya kesulitan siswa.

Pada dasarnya dalam memandang bagaimana siswa belajar antara teori Piaget dan Vygotsky adalah sama, yakni belajar merupakan proses konstruksi. Piaget lebih memandang konstruksi dilakukan individu (tidak "harus" dengan interaksi sosial), sedangkan Vygotsky memandang kontruksi terjadi ketika terjadi interaksi sosial. Hal penting yang menjadi inti utamanya adalah bagaimana proses pembentukan pengetahuan terjadi. Dalam hal ini, bagaimana konstruksi pengetahuan terjadi saat siswa belajar.

Matematika merupakan pelajaran yang memiliki ciri khas khusus, dibangun menggunakan sistem aksiomatik yang ketat. Matematika sangat kental dengan sifat logis dan analitis (yang sering disebut penalaran). Dalam belajar matematika, konstruksi konsep matematika juga mengikuti sifat struktur konsep matematika. Sebagai contoh, ketika siswa ingin mengonstruksi konsep luas daerah segitiga dan siswa sudah memiliki konsep luas daerah persegi panjang, maka siswa bisa mengubah daerah segitiga menjadi daerah persegi panjang.

Berdasarkan Diagram 1.2. siswa telah memiliki pengetahuan awal luas daerah persegi panjang dan akan mengonstruksi konsep luas daerah segitiga, maka proses konstruksi yang dilakukan adalah mengubah bangun segitiga menjadi bangun persegi panjang. Segitiga memiliki alas disebut a dan memiliki tinggi disebut t. Segitiga dipotong berdasarkan tingginya sedemikian hingga segitiga bagian atas tingginya ½ t dan bagian bawah berupa trapesium dengan tinggi ½ t. Segitiga potongan atas dibelah menjadi dua dan masing-masing ditutupkan ke sisi kiri dan sisi kanan trapesium, maka bentuknya menjadi persegi panjang dengan sisi panjangnya ***a*** dan sisi lebarnya ½ t. Karena sudah ada konstruksi luas daerah persegi panjang, maka luas daerah segitiga dapat dikonstruksi sebagai L = a x ½ t atau biasa ditulis L = ½ a t.

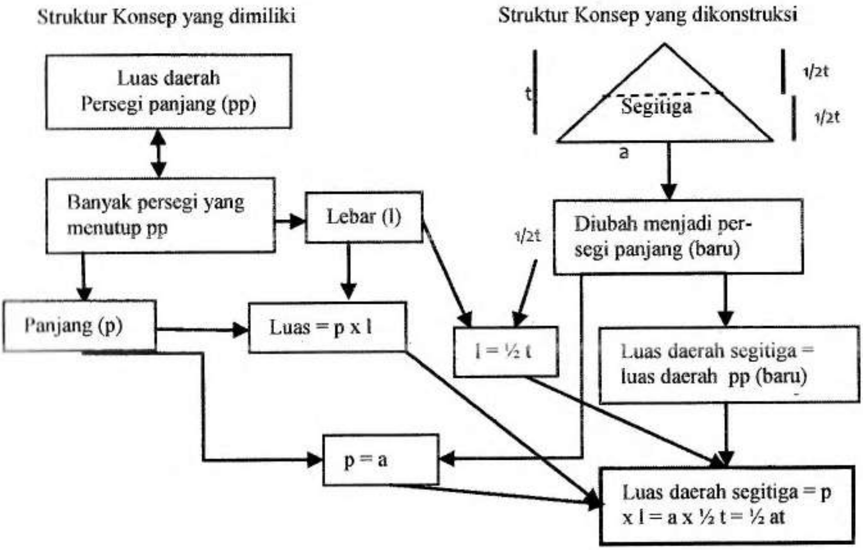


Diagram 1.2. Konstruksi Konsep dalam Belajar Matematika

Apabila siswa melanjutkan belajar luas daerah lingkaran maka proses konstruksi yang dilakukan bisa melalui luas daerah persegi panjang atau luas daerah segitiga.

B. Konstruksi Pemecahan Masalah Matematika

Problem solving merupakan inti dari belajar matematika. Kemampuan *problem solving* dapat ditransfer untuk memecahkan masalah-masalah lain dalam kehidupan. Semakin baik kemampuan problem solving siswa, maka semakin besar pula peluangnya untuk mampu menghadapi tantangan kehidupan yang selalu berubah. Pentingnya mengembangkan *problem solving* dalam pembelajaran matematika diungkapkan oleh banyak peneliti (Charless dan Lester, 1997; Goos, M, 2004; Pape, 2004, Blanton dan Kaput, 2005, Lee, Brown & Orrill, 2011; Wu&Adam, 2006; Lee, 2005). NCTM (2000) menyatakan bahwa *"solving problems is not only a goal of learning mathematics but also a major means of doing so...By learning problem solving in mathematics, student should acquire ways of thingking, habits of persistence and curiosity, and confidence in unfamiliar situation"*.

Pentingnya *problem solving* menjadi perhatian semua kalangan. Namun kenyataannya kemampuan *problem solving* siswa masih rendah. Rendahnya kemampuan pemecahan masalah sebagai akibat pembelajaran yang "kurang" bermakna (Subanji, 2011). Lebih lanjut, Subanji & Supratman (2015) menjelaskan bahwa kebanyakan pengajar matematika mengajarkan prosedur dengan tanpa menjelaskan mengapa prosedur tersebut digunakan. Sehingga siswa beranggapan bahwa dalam menyelesaikan masalah, cukup memilih prosedur penyelesaian yang sesuai dengan masalah yang diberikan. Dalam hal ini fokus pembelajaran tidak pada *mengapa* prosedur tertentu itu yang digunakan untuk menyelesaikan, tetapi prosedur *mana* yang dipilih untuk menyelesaikan masalah dan pada *bagaimana* menyelesaikan dengan prosedur tersebut. Siswa mungkin terampil menyelesaikan soal-soal latihan, tetapi tidak mampu mengembangkan berpikirnya untuk memecahkan masalah-masalah yang tidak rutin.

Dalam pemecahan masalah, siswa siswa sering dihadapkan pada proses berpikir analitik. Karena masalah yang dihadapi oleh siswa sangat kompleks dibandingkan dengan struktur kognitif yang dimilikinya, maka siswa perlu mengurai masalah menjadi informasi-informasi kecil (sederhana) sehingga mudah untuk diselesaikan. Dari penyelesaian perbagian dilanjutkan dengan membuat pengaitan antar komponen penyelesaian sedemikian hingga menjadi penyelesaian secara menyeluruh. Kesulitan siswa dalam *problem solving* biasanya terkait dengan ketidakmampuannya dalam mengurai masalah menjadi komponen-komponen sederhana sedemikian hingga mudah untuk diselesaikan dan kesulitan siswa dalam membuat kaitan antar komponen sedemikian hingga dapat dimanfaatkan untuk memecahkan masalah (Subanji, 2011). Seringkali siswa tidak mengetahui bagaimana harus memulai pemecahan masalah, bagaimana mengaitkan satu konsep dengan konsep lain, dan bagaimana mengaitkan satu prosedur dengan prosedur lain untuk memecahkan masalah.

Untuk mengatasi kesulitan siswa dalam pemecahan masalah tersebut, perlu diawali dari kajian proses konstruksi siswa dalam memecahkan masalah. Mengetahui proses konstruksi pemecahan masalah matematika siswa sangat penting, karena bisa dilihat di bagian mana siswa mengalami kesulitan dan harus diberi *scaffolding* apa supaya berpikirnya bisa berkembang. Dengan mengetahui proses konstruksi siswa dalam memecahkan masalah matematika juga dapat digunakan untuk mendeteksi kesalahan dalam membuat koneksi matematis atau ketiadaan koneksi matematis yang seharusnya dibangun oleh siswa. Karena itu proses konstruksi siswa dalam memecahkan masalah perlu menjadi perhatian bagi pendidik.

Subanji (2007) menjelaskan bahwa dalam proses pemecahan masalah, ketika struktur masalah yang dihadapi oleh seseorang jauh lebih kompleks dibanding struktur berpikirnya, maka akan mengalami kesulitan dalam proses konstruksi karena siswa akan mengalami kesulitan dalam proses asimilasi atau akomodasi. Untuk melakukan asimilasi belum ada skema yang sesuai dengan masalah yang dihadapi dan untuk melakukan akomodasi, yaitu mengubah skema lama atau membentuk skema baru masih mengalami kesulitan, karena belum cukup memiliki skema yang dapat digunakan untuk membentuk skema baru. Dalam hal ini perlu proses lagi agar dapat terjadi proses konstruksi, yakni menguraikan (atau memotong) masalah ke bagian-bagiannya. Masalah yang sudah terurai menjadi informasi-informasi yang lebih sederhana akan mudah untuk diasimilasi atau diakomodasi. Berikutnya bisa berlangsung restrukturisasi, pengaitan antar komponen berpikir dan membentuk skema baru yang lebih kompleks yang dapat mengasimilasi atau mengakomodasi masalah yang kompleks (keseluruhan). Proses pemecahan struktur masalah yang kompleks ke bagian-bagiannya ini oleh Subanji (2011) disebut *proses analitik*. Adapun proses analitik dapat diilustrasikan seperti Diagram 1.3.

Kemampuan pemecahan masalah matematika akan selalu meningkat seiring dengan semakin banyaknya masalah yang dihadapi oleh siswa, dengan syarat pemecahan masalah tersebut bermakna bagi siswa. Pemecahan masalah yang bermakna akan membentuk jaringan antar pengetahuan dalam pikiran siswa. Sebaliknya pemecahan masalah yang tidak bermakna tidak akan mengembangkan proses berpikir siswa dalam mengonstruksi pemecahan masalah matematika. Pemecahan masalah yang tidak bermakna justru akan menghambat siswa dalam proses konstruksi pemecahan masalah. Pemecahan masalah bermakna yang sudah berhasil dikonstruksi akan menjadi "modal" bagi siswa untuk pemecahan masalah berikutnya. Perkembangan kemampuan pemecahan masalah ini terus berlangsung sepanjang proses belajar siswa dalam pemecahan masalah matematika dan semakin banyak masalah yang sudah berhasil diselesaikan oleh siswa akan mempermudah dan mempercepat proses belajar pemecahan masalah matematika.

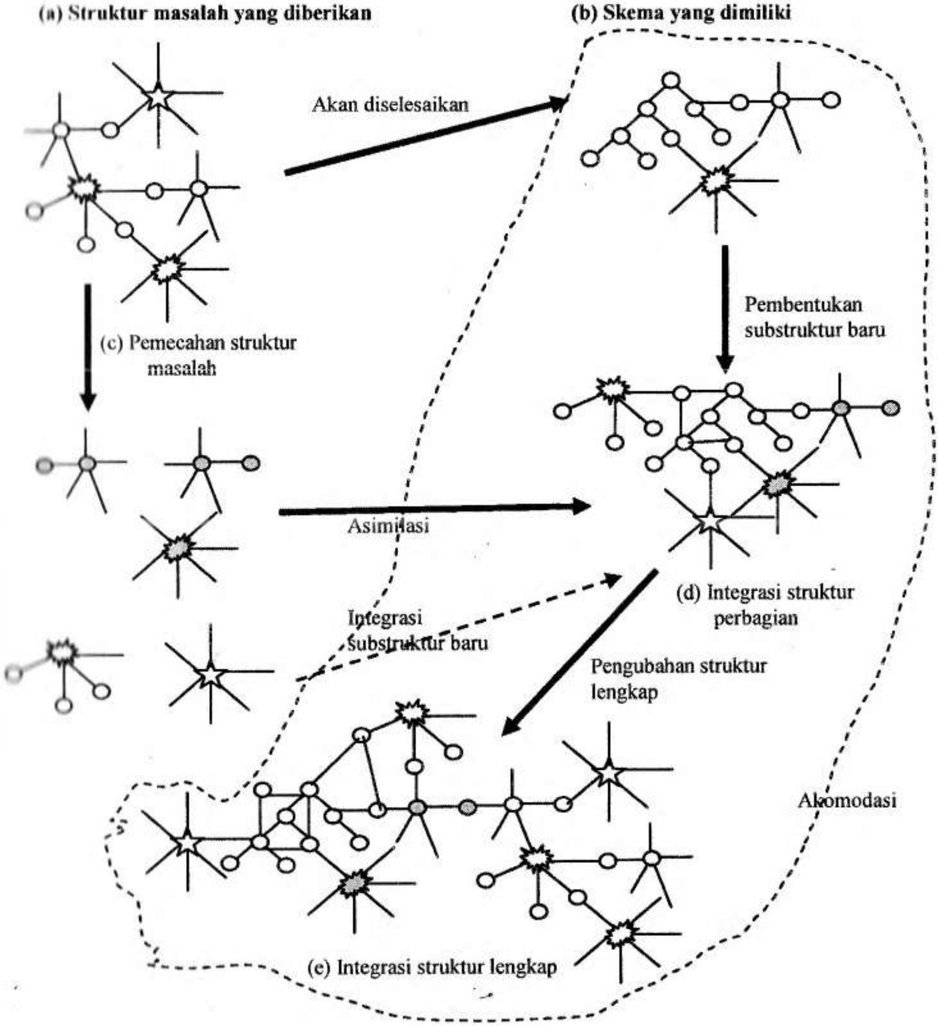


Diagram 1.3. Konstruksi Pemecahan Masalah diadopsi dari Subanji (2007)

Misalkan masalah yang kompleks (seperti Diagram 1.3 (a)), diberikan kepada siswa, sementara skema (struktur) yang dimiliki siswa (Diagram 1.3 (b)) masih jauh lebih sederhana dibandingkan struktur masalahnya, maka proses asimilasi atau akomodasi akan sulit berlangsung. Karena itu diperlukan penyederhanaan masalah (penguraian/pemotongan), sehingga sruktur yang dimiliki oleh siswa bisa *conect* (sambung) dengan struktur masalah yang diberikan. Selanjutnya terjadi proses asimilasi dan akomodasi bagian perbagian (Diagram 1.3 (d)) dan membentuk substruktur baru yang sudah ada kaitannya dengan masalah yang diberikan. Proses berikutnya adalah akomodasi menyeluruh. Dalam hal ini terjadi integrasi substruktur-substruktur sampai terbentuk struktur baru (Diagram 1.3 (e)) dan terjadilah kondisi equilibrium. Dengan terselesaikannnya masalah tersebut, maka siswa sudah melakukan adaptasi terhadap masalah yang dihadapi.

C. Berpikir dalam Proses Konstruksi

Manusia memiliki keistimewaan dibandingkan dengan makhluk lain, karena memiliki kemampuan berpikir yang lebih dibandingkan dengan yang lain. Hewan, misalnya lebih didominasi oleh kehendak, dan hanya sedikit memiliki kemampuan berpikir. Meskipun sebagian dari hewan memiliki kelebihan dalam hal: (1) indra penglihatan (misalnya), (2) indra penciuman (seperti anjing dan kucing), dan (3) indra pendengaran (seperti kelelawar). Namun hewan-hewan tersebut menjalani hidupnya lebih banyak menggunakan instink. Manusia menjalani hidupnya dengan berbagai macam pilihan sebagai konsekuensi dari kemampuan berpikirnya. Pilihan (secara ekstrim) dibedakan menjadi dua macam, yakni pilihan terhadap jalan yang benar dan pilihan terhadap jalan yang salah. Meskipun sebenarnya masih banyak pilihan lagi diantara benar dan salah. Mungkin setengah benar (setengah salah), banyak benar (sedikit salah), atau sebaliknya banyak salah (sedikit benar).

Pada dasarnya manusia dapat membedakan antara jalan yang benar dan jalan yang salah, namun tidak berarti semua manusia memilih jalan yang benar. Karena terdapat sisi lain dari manusia, yakni pengaruh hawa nafsunya. Manusia memiliki keinginan (hawa nafsu) untuk menguasai berbagai hal. Sehingga untuk memenuhi keinginannya, bisa jadi dilakukan dengan berbagai macam cara yang kadangkala bukan jalan yang "murni" benar.

Dengan kemampuan berpikirnya, manusia bisa mempelajari alam semesta, dengan berbagai macam isinya, berbagai macam sifatnya, dan mampu mengoptimalkan kebermanfaatannya. Dengan berpikir, manusia bisa memelihara dan memanfaatkan alam secara baik. Namun dengan hawa nafsunya, manusia juga bisa merusaknya. Karena itu berpikir merupakan kunci keberhasilan hidup manusia, sekaligus kunci kebahagiaan hidup manusia, "**dengan catatan**" manusia mau dan mampu menghayatinya, mau dan mampu memilih jalan yang benar. Sebaliknya kemampuan berpikir akan menjadi sumber kehancuran dan kesengsaraan, apabila manusia hanya mengedepankan nafsunya.

Ini berarti proses berpikir merupakan kunci dari kehidupan manusia. Berbagai macam kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi merupakan karya berpikir manusia. Masuknya ke abad teknologi dan informasi juga sebagai wujud perkembangan proses berpikir manusia. Semakin tajamnya persaingan hidup dalam menguasai teknologi juga merupakan fakta adanya perkembangan proses berpikir. Karena itu, agar mampu bersaing menghadapi perkembangan ilmu pengetahuan, teknologi, dan seni "harus" membekali generasi mendatang dengan kemampuan mengembangkan berpikir.

Apabila generasi mendatang tidak dibekali untuk mengembangkan kemampuan berpikirnya, maka mereka akan semakin sulit untuk bisa "eksis" dalam menghadapi tantangan kehidupan yang semakin keras. Bahkan mereka akan tergilas oleh perkembangan zaman. Karena itu, pendidikan merupakan salah satu media untuk menghadapi tantangan zaman, asalkan pendidikan dijalankan secara benar.

Pendidikan akan menjadi media efektif, apabila dalam prosesnya dijalankan secara benar, yakni senantiasa mengajak anak untuk berpikir. ***Dalam proses pendidikan di sekolah, dikatakan sudah terjadi pembelajaran, apabila guru sudah mengajak siswa untuk berpikir***. Sebaliknya apabila guru di kelas belum mengkondisikan siswa untuk berpikir, maka belum bisa dikatakan terjadi proses pembelajaran.

Salah satu bidang studi yang memiliki karakteristik "mendorong siswa untuk berpikir" adalah matematika. Karena salah satu "keunikan" matematika adalah dibangun dari sistem aksiomatik yang ketat. Sehingga sifat logis dan analitisnya (yang selanjutnya disebut penalaran) adalah sangat kuat. Apabila proses pembelajaran matematika dilakukan secara benar (dengan mengajak anak untuk berpikir), maka proses berpikir anak akan berkembang secara baik dan maksimal. Sebaliknya apabila proses pembelajaran dilakukan "belum atau kurang" mengajak anak berpikir, maka perkembangan berpikir anak tidak bisa optimal.

Ada suatu penelitian yang membahas tentang perkembangan berpikir yakni menjelaskan hubungan antara tantangan (pemberian masalah) dan perkembangan berpikir (khusunya perkembangan sel dendritnya). Dua kelompok tikus yang diletakkan di dua kandang berbeda. Kelompok tikus pertama dikondisikan dengan berbagai kemudahan (kemanjaan) untuk mendapatkan makanan, sudah disediakan di tempat yang mudah dijangkau. Kelompok kedua dikondisikan dengan berbagai tantangan untuk mendapatkan makanan, karena makanan digantung di kandang tersebut sehingga untuk mencapai ke makanan itu perlu perjuangan keras. Dengan melompat, tikus tersebut hanya mampu menggigit sedikit makanan, bahkan mungkin dalam suatu lompatan tidak berhasil menggigit makanan. Setelah dua bulan tikus-tikus tersebut dibedah otaknya untuk dilihat perkembangan sel dendritnya. Sungguh luar biasa, tikus yang diberikan tantangan, perkembangan sel otaknya sangat pesat. Sedangkan tikus yang serba dimanjakan sel otaknya berkembang secara lambat.

Sesuatu yang bisa dipetik dari riset tersebut adalah perlunya memberi tantangan kepada siswa agar perkembangan berpikirnya menjadi optimal. Karena itu seorang guru harus senantiasa mengajak berpikir siswanya dengan menyediakan masalah yang sesuai dengan tahap perkembangannya. Sehingga siswa mampu mengembangkan berpikirnya secara baik dan akhirnya mampu menyelesaikan masalah-masalah dalam kehidupannya. Proses berpikir siswa sangat penting dalam belajar matematika, terutama dalam proses mengonstruksi konsep dan mengonstruksi pemecahan masalah matematika.

D. Pentingnya Kajian Kesalahan Konstruksi

Kenyataan di sekolah, masih banyak sekolah yang mengondisikan siswanya "hanya sekedar" bisa menyelesaikan soal, tetapi belum mampu menyelesaikan masalah. Padahal yang dibutuhkan di dalam kehidupan masyarakat adalah kemampuan memecahkan masalah. Hal ini dapat terjadi, karena proses pembelajaran, yang secara umum dilakukan oleh pendidik (guru) adalah menyampaikan materi dan siswa harus mendengarkan/memperhatikan; guru memberikan contoh soal sekaligus menyelesaikan dan siswa mencatat contoh soal yang diberikan; guru memberikan latihan soal yang mirip dengan contoh soal yang telah diberikan dan siswa mengerjakan seperti yang dicontohkan oleh guru; dan dilanjutkan memberikan tugas "mengerjakan soal" di buku paket (atau Lembar Kerja Siswa).

Akibat dari proses tersebut adalah siswa hanya sekedar "meniru" prosedur yang sudah dilakukan oleh guru. Bahkan seringkali siswa "tidak tahu" mengapa harus menggunakan prosedur seperti itu. Yang penting bagi siswa adalah "sudah" menggunakan prosedur yang dicontohkan oleh guru dan memperoleh jawaban yang sesuai dengan yang dikehendaki oleh guru. Dalam hal ini siswa tidak perlu berpikir alternatif (cara lain), yang mungkin lebih efektif dan efisien.

Salah satu hal yang lebih mendukung "proses meniru" ini adalah keinginan pendidik untuk lebih cepat dalam melakukan evaluasi. Dalam hal ini evaluasi akan mudah dilakukan, apabila cara yang dilakukan oleh siswa seragam/sama. Karena itu penekanan prosedur (cara menjawab) menjadi dominan dalam pembelajaran. Akibatnya proses pembelajaran tidak mengembangkan berpikir siswa dan penalaran tidak terkonstruksi secara baik.

Proses pembelajaran tersebut dapat menimbulkan "bibit-bibit penyakit berpikir" dalam pembelajaran matematika. Adanya penyakit berpikir bisa nampak dari adanya berpikir pseudo, kesalahan konsep, dan kesalahan dalam pemecahan masalah. Proses berpikir pseudo telah dikaji oleh banyak peneliti dengan istilah yang berbeda-beda. Vinner (1997) menggunakan istilah *Pseudo-Analytic versus Analytic.* Lithner (2000) menggunakan istilah *Established Experience* (EE) *versus Plausible Reasoning* (PR). Leron (2005) mengkaji *Dual Process Theory* dari Kahneman (*proses System 1 versus proses System* 2). Dan Pape (2004) menggunakan istilah *Direct Translation Approach* (DTA) *versus Meaning Based Approach* (MBA). Selanjutnya kajian secara lebih mendalam berkaitan dengan terjadinya berpikir pseudo telah dikaji oleh Subanji (2007, 2011, 2015) melalui proses asimilasi dan akomodasi dari Piaget.

Berdasarkan masalah-masalah tersebut, mengaji kesalahan siswa dalam mengonstruksi konsep dan pemecahan masalah menjadi hal penting. Dalam hal ini perlu dipelajari "bagaimana sebenarnya seorang siswa mengonstruksi pengetahuan dalam proses pembelajaran, kesalahan siswa dalam mengonstruksi konsep, keterkaitan konsep, dan pemecahan masalah matematika.

Kesalahan siswa dalam belajar matematika akan ditelusuri secara mendalam, sedemikian hingga bisa menjawab pertanyaan "bagaimana kesalahan bisa terjadi ditinjau dari proses konstruksi". Dengan eksplorasi secara mendalam akan dapat digambarkan proses terjadinya kesalahan dan diperoleh teori konstruksi. Teori yang dihasilkan dari penelitian ini adalah terjadinya kesalahan dalam mengonstruksi dan memecahkan masalah meliputi: (a) *pseudo construction,* (b) *hole contruction* (lubang konstruksi), (c) *mis-analogical construction,* dan (d) *mis-logical construction.* Karena itu dalam buku ini dikaji teori kesalahan konstruksi konsep dan kesalahan dalam pemecahan masalah matematika.

BAB II

ANALISIS MASALAH DAN KERANGKA KONSEPTUAL TEORI KESALAHAN KONSTRUKSI

A. Kesalahan Konstruksi Konsep dalam Belajar Matematika

Kesulitan siswa dalam mengonstruksi dan memecahkan masalah matematika seringkali tercermin dalam bentuk kesalahannya. Kesulitan dan kesalahan matematika siswa telah dikaji oleh banyak peneliti (Brodie, 2010; Shein, 2012; Gal & Linchevski, 2010; Bingolbali, dkk, 2010). Brodie (2010) menjelaskan bahwa kesalahan siswa dalam membangun penalaran matematika meliputi: *basic error, appropriate error, missing information, partial insight*. *Basic error* dicontohkan terjadi ketika siswa menjawab $x^2 + 1 = 2x^2$. Ap*propriate error* tercermin dari pernyataan siswa dalam penyelesaian masalah *"if x is negative number, you can write it as –x"*, jika x bilangan negatif, maka bisa ditulis $-x$. Kesalahan dalam bentuk *basic error dan appropriate error* menurut Subanji dkk (1993) dikelompokkan sebagai kesalahan konsep. *Missing information* terjadi pada saat siswa menjelaskan bahwa *"x^2 is always greather than zero"*. Pada kesalahan ini siswa tidak memahami bahwa x^2 bisa bernilai nol. *Partial insight* terjadi pada saat siswa menjelaskan *" as you substitute lower number, the value of $x^2 + 1$ is decreases"*, siswa hanya berpikir parsial pada bilangan yang kecil. Padahal pada bilangan yang besar nilai $x^2 + 1$ justru akan membesar. Kesalahan-kesalahan tersebut akan senantiasa terjadi ketika siswa menghadapi masalah yang analog, bahkan akan berkelanjutan.

Shein (2012) mengkaji pemanfaatan gesture untuk memperbaiki kesalahan matematika siswa. Dalam pembelajaran matematika seringkali guru menekankan konsep dengan memanfaatkan gerakan tangannya atau ekspresi kepalanya. Gesture yang dilakukan oleh guru sangat berkaitan dengan proses berpikir siswa dalam mengonstruksi konsep matematika. Bahkan seringkali siswa menjadi berkonsentrasi penuh ketika gurunya melakukan gesture. Karena itu gestrure sangat menarik bila dikaitkan dengan proses berpikir siswa. Gal & Linchevski (2010) menemukan bahwa kesulitan siswa dalam representasi geometri mencakup: *(1) perceptual organization: Gestalt principles, (2) recognition: bottom -up and top-down processing; and (3) representation of perception-based knowledge: verbal vs. pictorial representation, mental images and hierarchical structure of images.*

Bingobali, dkk (2010) mengeksplorasi penyebab terjadinya kesulitan matematika siswa berdasarkan pandangan guru, yang meliputi: *Epistemological causes, Psychological causes, Pedagogical cause.* Kesulitan siswa dalam belajar matematika dipegaruhi oleh kompleksitas materi, persepsi siswa terhadap matematika, dan cara guru mengajar. Lebih lanjut ditemukan bahwa kesulitan siswa antara lain terjadi karena kesulitan memahami konsep, kesulitan mengabstraksi konsep, dan kesulitan mengaitkan matematika dengan kehidupan sehari-hari. Karena matematika hanya diajarkan secara formal, dan tidak dikaitkan dengan kehidupan sehari-hari, maka persepsi siswa terhadap matematika hanya sekedar aturan yang harus dipenuhi. Bagi siswa yang penting mengikuti aturan penyelesaian soal untuk bisa bekerja di matematika.

Subanji (2007) menjelaskan bahwa kesalahan siswa juga bisa berbentuk berpikir pseudo, yakni pseudo benar dan pseudo salah. Pseudo benar terjadi ketika siswa memperoleh jawaban benar tetapi sebenarnya penalarannya salah. Sebagai contoh ketika diberi soal oleh gurunya, "tentukan luas daerah persegi panjang dengan 5 m dan lebar 4 m!". Siswa menjawab luasnya 20 m^2. Jawaban siswa benar, namun perlu ditelusuri mengapa mereka menjawab 20 m^2. Kalau siswa memperoleh jawaban tersebut dengan berpikir luas sebagai banyak persegi satuan yang menutup persegi panjang dengan direpresentasikan sebagai perkalian panjang dengan lebar, berarti siswa memahaminya. Tetapi bila siswa hanya mengingat bahwa mencari luas daerah persegi panjang caranya mengalikan dua bilangan yang ada di soal tersebut, maka jawaban benar tersebut masih semu (pseudo). Pseudo salah terjadi ketika jawaban siswa salah, tetapi sebenarnya siswa tersebut mampu bernalar secara benar.

Kesalahan matematika siswa perlu mendapatkan perhatian, karena kalau tidak segera diatasi, kesalahan tersebut akan berdampak secara beruntun ke masalah matematika berikutnya. Untuk memperbaiki kesalahan siswa perlu menelusuri sumber kesalahannya. Hal ini dapat dilakukan dengan menggunakan peta kognitif (*cognitive map*). Proses konstruksi matematik siswa bisa ditelusuri dan digambarkan dengan menggunakan peta kognitif, sehingga dapat ditemukan di komponen berpikir mana terjadinya kesalahan konstruksi.

Kajian tentang peta kognitif sudah banyak dilakukan (Pena, dkk, 2007; Jacobs, 2003; Perdikaris, 2012; Komf & Denicollo, 2005). Pena, dkk (2007) menegaskan bahwa *cognitive map* menggambarkan hubungan sebab akibat dari berbagai fenomena dan konsep, serta dapat dimodelkan. Dengan peta kognitif, alur berpikir siswa dapat ditelusuri dan digambarkan dalam diagram kognitif. Jacobs (2003) mengungkapkan bahwa cognitive map menunjukkan arah berpikir sedemikian hingga bisa menjadi petunjuk untuk melangkah berikutnya. Langkah-langkah yang dituliskan oleh siswa mencerminkan apa yang sedang dipikirkan dan bisa digunakan untuk menelusuri kesalahan berpikir matematiknya. Perdikaris (2012) menjelaskan *cogntive style* siswa dalam menyelesaikan masalah geometri dengan teori Van Hielle. Sedangkan Elbaz dkk (dalam Komf & Denicollo 2005) menggunakan *cognitive map* untuk menjelaskan struktur pengetahuan yang dimiliki oleh guru atau siswa. *Cognitive map* berbeda dengan *concept map*. *Concept map* menunjukkan hubungan herarkhi konsep, sedangkan *cognitive map* menggambarkan alur berpikir seseorang dalam mengonstruksi konsep atau memecahkan masalah. Karena itu cognitive map tidak menunjukkan herarkhi, tetapi lebih menggambarkan interkoneksi antar pengetahuan, masalah, prosedur, dan konsep dari hasil berpikir seseorang.

Proses berpikir siswa dalam mengonstruksi konsep dan memecahkan masalah matematika dapat dipotret menggunakan *cognitive map* dan dapat ditelusuri letak kesalahannya. Proses penelusuran kesalahan siswa dapat dilakukan dengan memanfaatkan kerangka kerja Piaget tentang proses konstruksi pengetahuan, yaitu asimilasi dan akomodasi. Berdasarkan potret kesalahan matematika siswa, dapat dilakukan reorganisasi berpikir siswa. Proses reorganisasi berpikir siswa disebut *defragmenting*. Untuk memfasilitasi terjadinya defraghmenting dapat dilakukan dengan menggunakan beberapa cara, antara lain: (1) scaffolding, (2) analisis proses konstruksi, (3) *conflict cognitive*, dan (3) disequilibrasi. Bentuk-bentuk proses pemberian scaffolding dikaji oleh Julia Angleri (2006), proses konstruksi dibahas oleh Dreifus (2010), disequlibrasi dikaji oleh Subanji (2007) berdasarkan kerangka Piaget.

Kesulitan siswa dalam belajar matematika sering direpresentasikan oleh adanya kesalahan dalam mengonstruksi konsep matematika. Sebagai contoh dalam belajar operasi bilangan bulat, siswa seringkali mengalami kesalahan karena dalam mengonstruksi konsep bilangan bulat ada yang salah. Subanji & Toto (2013) menemukan dalam menyelesaikan masalah $(-4 - 3 = -7)$ banyak siswa yang menjawab bahwa $-4 - 3 = -7$ adalah benar dengan alasan punya hutang 4 hutang lagi 3, hutangnya menjadi 7. Lambang bilangan negatif dan operasi pengurangan dikonstruksi oleh siswa sebagai "hutang". Kesalahan konstruksi ini mengakibatkan adanya hambatan dalam menyelesaikan masalah -3-(-4). -3 dikonstruksi sebagai hutang 3, -4 dikonstruksi sebagai hutang 4, dan akhirnya bermasalah ketika dikurangi dengan -4, karena -(-4) **tidak bisa** dikonstruksi sebagai "hutang-hutang 4" sehingga menjadi jumlah 4. Kesalahan konstruksi tersebut memaksa siswa menghafalkan "negatif ketemu negatif sama dengan positif" atau "negatif dikali negatif sama dengan positif" supaya bisa menyelesaikan -(-4).

Konstruksi konsep operasi bilangan bulat oleh siswa juga sering mengalami kesalahan dalam memaknai tanda "sama dengan (=)" (*equal sign*). Kebanyakan siswa memahami makna tanda "=" sebagai hasil (bukan sebagai relasi). Ketika dihadapkan pada masalah 25 + 15 = ... + 12, masih banyak siswa yang mengisi titik-titik tersebut dengan bilangan 40. Siswa yang menjawab 40, berpikir bahwa hasil penjumlahan 25 dengan 15 adalah 40. Dalam hal ini siswa tidak melihat tanda "sama dengan" sebagai relasi, yang menjadi perhatian hanya pada penjumlahan 25 + 15 sama dengan 40. Apabila siswa memandang tanda "=" sebagai relasi maka siswa akan berpikir bahwa di sisi kiri ada penjumlahan bilangan 25 dengan 15 dan di sisi kanan sudah ada bilangan 12, sehingga isian dari titik-titik tersebut adalah 28. Hasil 28 bisa diinterpretasi sebagai pengurangan 40 dengan 12 atau bisa diinterpretasi dengan melihat selisih 15 dengan 12 adalah 3, karena di sisi kiri ada 25 dan selisih "3", maka bilangan yang bisa menggantikan titik-titik adalah 28.

Kesalahan mengonstruksi konsep juga terjadi pada bentuk aljabar. Ketika siswa dihadapkan pada masalah $3x + 4x = ...$, siswa menjawab $7x$. Jawaban siswa nampak "benar", namun ketika ditelusuri bagaimana memperoleh jawaban tersebut, siswa memisalkan x sebagai buku, sehingga $3x + 4x$ direpresentasikan dari 3 buku ditambah 4 buku dan diperoleh 7 buku. Dalam hal ini x tidak dikonstruksi sebagai bilangan, tetapi sebagai benda (buku). Kesalahan konstruksi ini akan berdampak pada kesalahan dalam proses penjumlahan $3x + 4y$. Siswa memisalkan x sebagai buku dan y sebagai pensil. 3 buku ditambah 4 pensil bisa menghasilkan 7 buku pensil. Hal ini juga masuk akal, karena banyak bendanya ada 7 (berupa buku dan pensil). Kesalahan siswa dalam mengonstruksi bentuk aljabar dapat dikonflikan (*conflict cognitive*) dengan membawa konsep yang dikonstruksi dengan bentuk aljabar yang lebih kompleks. Sebagai contoh, siswa yang mengonstruksi x sebagai buku, bisa ditanyakan apa interpretasi dari x^2 atau $\sqrt{x}$. Apakah x kuadrat atau akar x dapat diinterpretasi sebagai "buku kuadrat atau akar dari buku"?. Konflik kognitif akan terjadi ketika siswa sudah bisa menangkap adanya hal yang **tidak masuk akal**, yakni "kuadrat buku dan akar dari buku". Kesalahan konstruksi bentuk aljabar seringkali dianggap sepele, padahal kesalahan konstruksi tersebut sangat fatal dan bisa menghambat proses belajar berikutnya.

Konsep bentuk aljabar seharusnya dipahami dari konsep bilangan dan operasinya. Bentuk aljabar 5x, 3x + 2x, dan 4x + 3y merupakan representasi dari bilangan-bilangan dengan x dan y anggota suatu himpunan (bisa himpunan bilangan asli, himpunan bilangan cacah, himpunan bilangan bulat, himpunan bilangan rasional, atau himpunan bilangan riil). Penjumlahan 3x + 2x dapat dilakukan karena ada sifat bilangan yang menjamin penjumlahan tersebut, yakni *sifat assosiatif*, 3x + 2x = (2+3)x = 5x. Sedangkan 4x + 3y tidak bisa dijumlahkan karena tidak ada sifat bilangan yang dapat menjamin operasi tersebut.

Kesalahan siswa dalam mengonstruksi konsep barisan bilangan juga sering terjadi. Siswa menginterpretasi barisan bilangan sebagai bilangan yang tersusun dalam pola tertentu. Siswa mengonstruksi barisan bilangan "**bukan**" sebagai fungsi dari bilangan asli ke bilangan riil bahwa domain fungsinya adalah bilangan asli dan kodomainnya adalah bilangan riil. Siswa bisa mengonstruksi 1, 3, 5, 7, ... sebagai barisan (artimatika) yang memiliki beda 2 diawali dari 1. Begitupula siswa bisa segera tahu bahwa 1, 2, 4, 6, 8, 10, ... merupakan barisan (geometri) dengan rasio 2 diawali dari suku pertama 1. Siswa juga tahu bahwa 1, 2, 4, 8, 16, ... merupakan barisan bilangan yang memiliki rumus Un = 2^{n-1}. Siswa akan mengalami kesulitan ketika dihadapkan pada masalah 1,2,1,2,1,2,.... Mereka menganggap 1,2,1,2,1,2,...; 1,2,1,1,1,...; dan 1,2,2,2,... bukan merupakan barisan bilangan. Justifikasi bentuk-bentuk tersebut bukan barisan bilangan karena tidak memiliki keteraturan seperti barisan geometri atau aritmatika. Padahal bentuk-bentuk tersebut merupakan barisan bilangan, hal ini mudah dipahami apabila siswa mengonstruksi barisan sebagai fungsi dari bilangan asli ke bilangan riil. Bentuk 1,2,1,2,1,2,... dapat dituliskan dalam fungsi (berbentuk rumus suku ke-n), $Un = \begin{cases} 1, \; untuk\; n\; ganjil \\ 2\; untuk\; n\; genap \end{cases}$. Bentuk 1,2,1,1,1,... dapat dituliskan dalam fungsi (rumus suku ke-n), $Un = \begin{cases} 1, untuk\ n \neq 2 \\ 2, untuk\ n = 2 \end{cases}$. Bentuk 1,2,2,2,... dapat dituliskan dalam bentuk fungsi (rumus suku ke-n), $Un = \begin{cases} 1, untuk\ n = 1 \\ 2, untuk\ n \neq 1 \end{cases}$. Kesalahan siswa dalam mengonstruksi konsep barisan bilangan bisa menghambat pemecahan masalah barisan bilangan. Siswa akan mengalami kesulitan ketika dihadapkan pada konstruksi barisan bilangan (membuat barisan bilangan sebanyak-banyak dengan diketahui dua suku pertamanya). Misal diberikan masalah "buatkan sebanyak-banyaknya barisan bilangan dengan suku pertama dan keduanya 1,3,...!". Sebagian besar siswa hanya mampu membuat dua barisan bilangan, yakni 1,3,5,7,... dan 1,3,9,..., meskipun sebenarnya bisa dibuat barisan bilangan yang jumlahnya sangat banyak bahkan mungkin tak hingga banyaknya.

Kesalahan dalam memahami konsep matematika juga sering terjadi konsep ukuran sudut. Ada konsep ukuran sudut:

1^0 (satu derajat) = 60′ (enam puluh menit).
1′ (satu menit) = 60″ (enam puluh detik)

Kesalahan yang terjadi adalah "menit" dan "detik" diartikan sebagai waktu, sehingga tidak akan bisa menemukan bentuk $1^0 = 60'$. Kesalahan konsep tersebut dapat dijelaksan sebagai berikut, kalau "menit" dan "detik" diinterpretasi sebagai waktu, maka 360^0 (satu putaran) = 60 menit, akibatnya 6 derajat = 1 menit (INI SALAH). Selanjutnya timbul pertanyaan, bagaimana konsep yang benar terkait dengan ukuran sudut ini? Konsep "menit" dan "detik" dalam konteks sudut ini bukan satuan waktu, tetapi konsep ukuran sudut. Bahwa satu derajat dapat "dipecah" menjadi 60 bagian sudut dan satu bagiannya disebut "menit" ditulis ('). Jika satu menit dipecah menjadi 60 bagian sudut, maka satu bagian sudutnya disebut satu "detik" dan ditulis (").

Kesalahan siswa dalam mengonstruksi konsep matematika disebabkan antara lain oleh pembelajaran yang menekankan prosedur. Dalam penjumlahan atau pengurangan bilangan dengan prosedur bersusun, seringkali siswa melakukan dengan tidak bermakna, hanya mengikuti prosedur yang sudah diberikan oleh guru. Prosedur penjumlahan dilakukan dari belakang dan prosedur pengurangan dilakukan dari belakang. Meskipun tahu prosedur tersebut, tetapi siswa tidak memahami mengapa dilakukan dengan prosedur tersebut. Senada dengan konsep penjumlahan dan pengurangan, konsep perkalian dan pembagian juga dilakukan dengan prosedur: membagi dari angka depan dan mengali dari belakang. Seakan-akan prosedur tersebut merupakan "hukum" atau "peraturan" atau "kesepakatan" yang harus diterima dengan tanpa harus mempertanyakan kenapa prosedur tersebut dilakukan. Kesalahan tersebut berawal dari proses pembelajaran, dalam hal ini pendidik matematika ikut melakukan prosedur tersebut tanpa mempertanyakannya. Hal ini diperkuat oleh hasil tes yang dilakukan oleh guru dalam konsep penjumlahan dan pengurangan bilangan bersusun seperti berikut.

Berikut ini hasil kerja seorang guru sekolah dasar dalam menyelesaikan masalah penjumlahan dan pengurangan:

Masalah A	MASALAH B
1	3 1
2 5 9	~~4~~ 2 9
3 8 +	3 4
2 9 7	−
	3 9 5

Apakah angka 1 pada masalah A dan angka 1 pada masalah B menyatakan bilangan yang sama? Jelaskan jawabanmu!

Jawaban subjek (guru) terhadap masalah tersebut disajikan seperti berikut.

Angka 1 pada masalah A dan masalah B adalah merupakan bilangan yang sama karena angka sebenarnya merupakan bilangan puluhan yakni bilangan sepuluh. Sehingga ketika kita mengajarkan bahwa angka satu yang disimpan atau diambil pada angka yang lain maka perlu diberikan penjelasan kepada siswa bahwa sebenar angka ~~8~~ 1 itu adalah angka puluhan.

Subjek menjawab angka 1 pada masalah A sama nilainya dengan angka 1 pada masalah B. Subjek yakin bahwa 1 pada kedua masalah tersebut nilainya adalah 10. Hal ini diperkuat dengan penjelasan Subjek berikut.

namun ~~angka ke~~ penempatan angka satu yang juga bisa berbeda ~~untuk~~ jika angka 1 pada masalah A adalah sebenarnya adalah angka 10 karena 9 + 8 = 17 namun penempatannya menjadi angka 1. karena operasi hitungnya ~~ju~~ adalah penjumlahan. begitu juga sebaliknya jika operasi hitung pengurangan maka angka 1 harus menjadi 10.

Subjek mengalami kesalahan dalam mengonstruksi makna angka 1 di masalah A dan masalah B. Untuk masalah A, angka 1 merepresentasikan bilangan 10, karena angka 1 merupakan simpanan dari hasil penjumlahan 9 dan 8. 9+8 = 17, ditulis 7 dan disimpan 1 (artinya 10). Untuk masalah B, angka 1 merepresentasikan bilangan 100, karena angka 1 merupakan pinjaman dari 4 (400). Karena 20 dikurangi 30 tidak bisa, maka mengambil 1 ratusan (100) dari 400, sehingga menjadi 120 dikurangi 30, diperoleh 90 dan ditulis 9. Hal ini berarti angka 1 pada masalah B merepresentasikan bilangan 100 dan berbeda dengan angka 1 pada masalah A yang merepresentasikan bilangan 10.

B. Kesalahan Konstruksi dalam Pemecahan Masalah Matematika

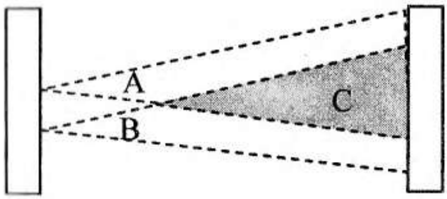
Pemecahan masalah (*problem solving*) merupakan bagian utama dalam belajar matematika. Menurut Subanji (2013), kemampuan pemecahan masalah dapat ditransfer untuk memecahkan masalah-masalah lain dalam kehidupan. Semakin baik kemampuan pemecahan masalah siswa, maka semakin besar pula peluangnya untuk mampu menghadapi tantangan kehidupan yang selalu berubah. Pentingnya mengembangkan *problem solving* dalam pembelajaran matematika diungkapkan oleh banyak peneliti (Charless dan Lester, 1997; Goos, M, 2004; Pape, 2004, Blanton dan Kaput, 2005). Bahkan di NCTM (2000) dinyatakan bahwa "*solving problems is not only a goal of learning mathematics but also a major means of doing so...By learning problem solving in mathematics, student should acquire ways of thingking, habits of persistence and curiosity, and confidence in unfamiliar situation*".

Pentingnya pemecahan masalah dalam pembelajaran matematika belum diikuti oleh sebagian besar guru dalam pembelajaran matematika di kelas. Guru belum menekankan pemecahan masalah dalam pembelajaran matematika. Salah satu alasannya adalah keterbatasan waktu dan materi matematika yang harus disampaikan terlalu banyak. Sementara pembelajaran dengan pemecahan masalah membutuhkan waktu yang banyak. Apapun alasannya, pembelajaran dengan menekankan pada pemecahan masalah harus dilakukan agar siswa berhasil dalam belajar matematika. Banyak cara yang bisa dilakukan oleh pendidik matematika untuk membelajarkan pemecahan masalah, antara lain dengan mengemas materi matematika dalam bentuk pemecahan masalah, mengawali pembelajaran matematika dengan menyajikan masalah, menanamkan konsep matematika melalui pemecahan masalah, dan pembelajaran berbasis masalah.

Belum optimalnya pemecahan masalah dalam pembelajaran matematika dan penekanan pembelajaran pada prosedur, mengakibatkan terjadinya kesalahan dalam konstruksi pemecahan masalah matematika. Kesalahan konstruksi pemecahan masalah terjadi dalam berbagai bentuk, antara lain: interferensi berpikir, kesalahan dalam menggunakan konsep, kesalahan dalam bernalar, dan kesalahan dalam koneksi matematis. Interferensi berpikir telah dikaji oleh banyak peneliti (Gabora, L. & Saab, A, 2011; Sarason and Irwin G., 1984; Yin C. and Wei K., 2014). Gabora, L. & Saab, A (2011) mengaji interferensi kreatif dalam pemecahan masalah analogi. Sarason and Irwin G. (1984) mengaji tentang stress, kecemasan, dan interferensi kognitif siswa dalam tes. Yin C. and Wei K. (2014) meneliti kemunculannya interferensi berpikir dalam aktifitas belajar.

Interferensi berpikir dalam memecahkan masalah terjadi ketika siswa memiliki konstruksi dua konsep atau lebih yang berlainan yang mana kedua konsep atau lebih tersebut saling terkait. Interferensi berpikir terjadi karena dalam proses pembelajaran, konsep-konsep matematika diajarkan kepada siswa secara terpisah, diikuti dengan contoh-contoh terpisah, dan masalah-masalah yang diberikan juga terpisah. Sebagai contoh interferensi berpikir dalam memecahkan masalah perbandingan senilai dan perbandingan berbalik nilai. Pembelajaran yang dilakukan oleh guru matematika biasanya mengikuti sajian materi di buku ajar. *Pertama,* menyajikan konsep perbandingan senilai, memberikan contoh kasus perbandingan senilai, memberikan latihan soal dan masalah perbandingan senilai. *Kedua,* menyajikan konsep perbandingan berbalik nilai, memberikan contoh kasus perbandingan berbalik nilai dan penyelesaiannya, memberikan latihan soal dan masalah perbandingan berbalik nilai. *Ketiga,* dilakukan tes dengan masalah campuran. Dalam hal ini siswa akan mengalami kesulitan untuk membedakan antara masalah perbandingan senilai dan perbandingan berbalik nilai. Siswa mengonstruksi konsep perbandingan tidak disertai dengan komponen yang membedakan, sehingga ketika dihadapkan pada masalah campuran, siswa mengalami kebingungan.

Masalah-masalah yang dapat menimbulkan interferensi berpikir dalam belajar matematika cukup banyak, antara lain: perbandingan senilai dan berbalik nilai, permutasi dan kombinasi, faktor persekutuan terbesar dan kelipatan persekutuan terkecil, sudut sehadap dan bertolak belakang, dan sebagainya. Interferensi berpikir siswa dalam belajar matematika tidak selalu menghambat proses belajar tetapi sebaliknya bisa memperkuat, asalkan dalam proses belajarnya "benar-benar" ada konstruksi konsep yang baik dan bermakna.



Gambar 2.1. Interferensi Berpikir

Dalam hal ini interferensi berpikir dapat dikelompokkan, antara lain: menghambat proses belajar siswa dan memperkuat proses belajar siswa. Apabila konstruksi konsep A dan konstruksi konsep B keduanya masih "samar-samar", maka akan terjadi interferensi yang saling menghambat (bagian C). Sebaliknya apabila konstruksi konsep pertama (A) dan konstruksi konsep kedua (B) saling dikontraskan, maka akan memperjelas posisi masing-masing konsep dan akan memperkuat proses konstruksi konsep.

Konstruksi pemecahan masalah sangat tergantung dari konstruksi konsep matematika yang dialami. Konstruksi konsep yang baik pada siswa akan membantu mempermudah proses konstruksi pemecahan masalah. Konstruksi pemecahan masalah dapat ditelusuri menggunakan kerangka kerja asimilasi dan akomodasi dari Piaget. Menurut Piaget (Subanji, 2011) ketika seseorang berinteraksi dengan lingkungan, maka akan terjadi proses adaptasi. Pada saat beradaptasi, seseorang mengalami dua proses kognitif, yaitu asimilasi dan akomodasi.

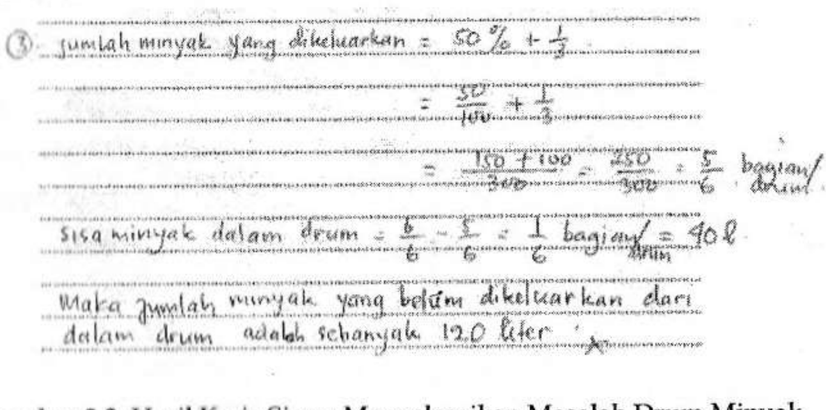
Subanji (2007, 2011, 2015) menjelaskan bahwa asimilasi merupakan proses pengintegrasian stimulus baru ke dalam skema yang sudah terbentuk. Dalam proses asimilasi, stimulus diinterpretasikan berdasarkan skema yang dimiliki oleh seseorang. Dalam hal ini, asimilasi merupakan proses pengintegrasian stimulus yang diterima ke dalam skema yang sudah ada. Dalam proses pembelajaran asimilasi mudah terjadi apabila informasi baru dimodifikasi sehingga sesuai dengan skema yang sudah dimiliki. Akomodasi merupakan proses pengintegrasian stimulus baru melalui pengubahan skema lama atau pembentukan skema baru dalam rangka menyesuaikan dengan stimulus yang diterima. Dalam pemecahan masalah seringkali seseorang mengalami kesulitan mencari strategi, karena masalah yang dihadapi tidak bisa dipecahkan dengan strategi yang sudah dimiliki, sehingga harus mencari atau membangun strategi baru sehingga masalah bisa dipecahkan. Kondisi dimana seseorang mengalami "kesulitan/kebingungan" mencerminkan adanya ketidakseimbangan antara asimilasi dan akomodasi yang disebut dengan *disequilibrasi*. Dengan mengalami kondisi disequilibrasi, seseorang akan melanjutkan proses mencari atau membangun strategi sehingga bisa memecahkan masalah secara baik. Proses berpikir dalam pemecahan masalah akan berlangsung sampai memperoleh penyelesaian sesuai yang diinginkan. Ketika penyelesaian sudah diperoleh oleh siswa berarti sudah terjadi keseimbangan antara asimilasi dan akomodasi, yang disebut *equilibrium*. Proses menuju equilibrium akan terjadi jika masalah yang diberikan kepada siswa terjangkau, artinya untuk memecahkan masalah tersebut siswa sudah memiliki pengetahuan prasyaratnya. Jika "problem" yang diberikan kepada siswa tidak terjangkau, maka "problem" tersebut menjadi "bukan masalah" bagi siswa.

Ketika struktur masalah yang dihadapi oleh siswa sudah sesuai dengan skema yang dimiliki, maka secara langsung siswa dapat menginterpretasikannya atau terjadi integrasi secara langsung. Dalam hal ini terjadi proses *asimilasi*. Ketika masalah yang dihadapi memiliki struktur yang kompleks dan siswa belum memiliki skema yang sesuai, maka terjadi proses "pengubahan skema lama" atau pembentukan skema baru untuk menyesuaikan dengan struktur masalah yang dihadapi. Setelah ada kesesuaian antara struktur masalah dan skema berpikir, maka akan terjadi proses integrasi. Proses pembentukan skema baru atau pengubahan skema lama untuk menyesuaikan dengan struktur masalah disebut proses *akomodasi*. Dalam proses pemecahan masalah, kedua proses, asimilasi dan akomodasi bisa terjadi secara bersama-sama.

Kesalahan siswa dalam pemecahan masalah dapat dikaji dengan menggunakan proses asimilasi dan akomodasi. Sebagai contoh, ketika siswa dihadapkan pada soal pemecahan masalah seperti berikut.

> *Sebuah drum berisi minyak. Pertama, dikeluarkan 50% nya, kemudian dikeluarkan lagi sepertiga dari sisanya. Akhirnya minyak di dalam drum tinggal 40 liter. Berapa liter minyak di dalam drum itu sebelum dikeluarkan sama sekali?*

Jawaban siswa terhadap masalah tersebut adalah sebagai berikut.


(3) Jumlah minyak yang dikeluarkan $= 50\% + \frac{1}{3}$

$= \frac{50}{100} + \frac{1}{3}$

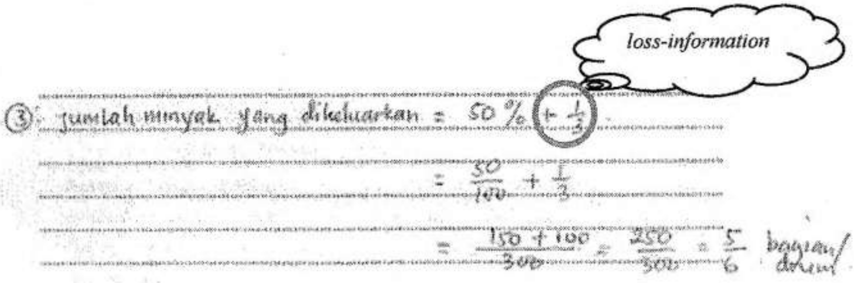
$= \frac{150+100}{300} = \frac{250}{300} = \frac{5}{6}$ bagian/drum

Sisa minyak dalam drum $= \frac{6}{6} - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$ bagian/drum $= 40\ \ell$

Maka jumlah minyak yang belum dikeluarkan dari dalam drum adalah sebanyak 120 liter.

Gambar 2.2. Hasil Kerja Siswa Menyelesaikan Masalah Drum Minyak

Siswa mengawali penyelesaiannya dengan memikirkan yang diketahui, yakni volume minyak dikeluarkan 50% nya dar kemudian dikeluarkan lagi sepertiga dari sisanya, sehing dia menuliskan



Jumlah minyak yang dikeluarkan = $50\% + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ bagian drum.

Dalam langkah ini terjadi kesalahan "asimilasi" pada siswa, $\frac{1}{3}$ sisa minyak yang dikeluarkan bukan dari kondisi penuh tetapi dari kondisi "sudah dikurangi 50% nya" tetapi siswa menginterpretasi (mengasimilasinya) dengan "$\frac{1}{3}$ dari kondisi penuh". Seharusnya "sepertiga" yang dimaksudkan adalah sepertiga dari setengah drum (karena sebelumnya sudah dikeluarkan 50% nya) atau bisa dituliskan sepertiga dari setengah ($\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$). Kesalahan konstruksi pemecahan masalah pada siswa terjadi dalam bentuk ***"loss-information"*** atau tidak tertangkapnya informasi yang ada dalam soal. Kesalahan konstruksi tersebut mengakibatkan kesalahan yang beruntun pada langkah berikutnya. Meskipun berpikir siswa pada langkah berikutnya cukup logis, hasil yang diperoleh tetap salah. Siswa berpikir bahwa dengan telah dikeluarkannya $\frac{5}{6}$ bagian berarti masih tersisa $\frac{6}{6} - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$ bagian.

Sisa minyak dalam drum $= \frac{6}{6} - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$ bagian$_{drum}$ = 40 ℓ

"Seperenam bagian" yang dipikirkan oleh siswa adalah seperenam dari drum yang penuh. Dia melanjutkan dengan memanfaatkan data yang ada, yakni minyak yang tersisa adalah 40 liter, sehingga diperoleh bentuk $\frac{1}{6}$ bagian = 40 liter. Seharusnya siswa berpikir minyak yang dikeluarkan $50\% + \frac{1}{3} * 50\% = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} * \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$ bagian. Minyak yang dikeluarkan adalah $\frac{4}{6}$ bagian yang mana volumenya 40 liter, sehingga diperoleh $\frac{4}{6}$ bagian = 40 liter dan seharusnya siswa menyimpulkan volume drum adalah 60 liter. Tetapi yang dilakukan oleh siswa justru "salah" dalam menyimpulkan.

Setelah memperoleh bentuk $\frac{1}{6}$ bagian sama dengan 40 liter, siswa menyimpulkan bahwa:

Maka jumlah minyak yang belum dikeluarkan dari dalam drum adalah sebanyak 120 liter

Kalau siswa konsisten dengan bentuk $\frac{1}{6}$ bagian sama dengan 40 liter, mestinya jawaban yang diperoleh adalah 240 liter, namun yang dituliskan oleh siswa adalah 120 liter. Ketika diklarifikasi oleh peneliti melalui indept interview, siswa menjawab seperti berikut.

P: *kalau 1/6 bagian sama dengan 40 liter, berapa isi drum penuhnya?*

S: *isu drum penuhnya enam dikalikan 40 liter, sama dengan 240 liter*

P: *bagaimana kamu memperoleh jawaban 120 liter tersebut?*

S: *saya kira yang diketahui tadi dikeluarkan 50%, berarti jawabnya 50% dari 240 liter atau sama dengan 120 liter.*

Dari jawaban siswa tersebut terlihat bahwa siswa mengalami interferensi berpikir. Siswa memahami makna 50% masih "samar-samar", sehingga kesimpulanpun dikaitkan dengan 50%. Kesalahan siswa dalam mengonstruksi pemecahan masalah juga terjadi dalam bentuk interferensi berpikir. Siswa mengalami "kekacauan" dalam memaknai 50%, sehingga menggunakannya dalam menyusun kesimpulan yang salah. Kesalahan berpikir siswa dalam mengonstruksi pemecahan masalah adalah kesalahan dalam asimilasi.

Kesalahan konstruksi pemecahan masalah siswa juga terjadi dalam memecahkan masalah berikut.

> *Panjang suatu persegi panjang bertambah 10%, sedangkan lebarnya bertambah 20%. Berapa persen pertambahan luas daerah persegi panjang tersebut?*

Jawaban siswa terhadap masalah tersebut adalah sebagai berikut.

(4) Panjang : bertambah 10 %
lebar = bertambah 20 %
Luas = p × l

Luas = 10 % × 20 %

$= \frac{10}{100} \times \frac{20}{100}$

$= \frac{200}{10.000}$

$= \frac{2}{100} = 2\%$

Maka pertambahan luas daerah persegi panjang sama dengan 2 %

Gambar 2.3. Hasil Kerja Siswa Menyelesaikan Masalah Luas Daerah PP

Kesalahan konstruksi pemecahan masalah siswa terjadi ketika menginterpretasi pernyataan "panjang suatu persegi panjang (pp) bertambah 10% dan lebarnya bertambah 20%" dengan model matematika "panjang = bertambah 10%" dan lebar = bertambah 20%". Kesalahan konstruksi siswa dalam membangun model terjadi karena siswa tidak bisa memahami bahwa panjang pp bertambah 10% berarti panjang pp baru = panjang pp lama ditambah dengan 10% panjang pp lama atau bisa ditulis p′ = p+10%p dengan p′ = panjang pp baru dan p = panjang pp lama.

Panjang = bertambah 10 %
lebar = bertambah 20 %.

Siswa sudah memahami bahwa luas persegi panjang adalah panjang dikalikan lebar. Hal ini dituliskan dalam rumus berikut.

luas = p × l

Namun siswa tidak memahami bahwa luas persegi panjang baru seharusnya L′= p′ x l′, yang ditulis siswa justru luas persegi panjang lama, yakni L = p x l.

Kesalahan berlanjut ketika siswa mereduksi informasi yang tertulis di model matematika, panjang = bertambah 10% direduksi menjadi panjang (*p*) = 10% dan lebar = bertambah 20% direduksi menjadi lebar (*l*) = 20%. Kesalahan ini berlanjut dengan proses menghitung pertambahan luas daerah seperti berikut.

$$\text{Luas} = 10\% \times 20\%$$
$$= \frac{10}{100} \times \frac{20}{100}$$
$$= \frac{200}{10.000}$$
$$= \frac{2}{100} = 2\%$$

Siswa mengonstruksi pertambahan luas daerah dengan mengalikan prosentase pertambahan panjang (10%) dan pertambahan lebar (20%). Kesalahan dalam mengonstruksi model mengakibatkan kesalahan dalam menentukan panjang dan lebar persegi panjang, akhirnya terjadi konstruksi pertambahan luas perkalian prosentase.

Maka pertambahan luas daerah persegi panjang sama dengan 2%.

Siswa mengalami kesalahan mengonstruksi pemecahan masalah dapat dilihat dari hasil konstruksinya. Seharusnya model yang dibangun oleh siswa luas barunya adalah: L = p′ x l′, dengan $p' = p + 10\%p = 1{,}1\ p$ dan $l' = l + 20\%l = 1{,}2l$, sehingga luas daerah yang baru adalah L′ = p′ x l′ = 1,1 p x 1,2 l = 1,32 pxl = 1,32 L′. Diperoleh hasil pertambahan luas daerahnya adalah 32%.

C. Kerangka Konseptual Kesalahan Konstruksi

Kesalahan konstruksi yang dimaksudkan dalam penelitian ini adalah penyimpangan pembentukan konsep atau pemecahan masalah dari konsep atau pemecahan masalah yang seharusnya. Kesalahan konstruksi tidak hanya tercermin dari jawaban salah dari siswa. Kesalahan konstruksi tercermin dari kesalahan proses membentuk konsep atau memecahkan masalah. Vygotsky (dalam Subanji, 2013) menjelaskan bahwa konsep atau pemecahan masalah yang dikonstruksi oleh siswa disebut sebagai konsep spontan, sedangkan konsep yang sudah ditemukan secara ilmiah dan diyakini kebenarannya disebut sebagai konsep ilmiah. Kesalahan siswa alam mengonstruksi konsep atau memecahkan masalah dapat ditelusuri dengan membandingkan antara konsep spontan dan konsep ilmiah. Subanji (2011) menjelaskan bahwa kesalahan siswa dalam mengonstruksi konsep atau memecahkan masalah dapat dikaji dengan membandingkan antara struktur masalah dan struktur berpikir siswa dalam mengonstruksi konsep atau memecahkan masalah.

Struktur masalah dapat dikonstruksi berdasarkan langkah-langkah mengonstruksi konsep atau memecahkan masalah. Sebagai contoh, diberikan masalah berikut.

Sebuah drum berisi minyak. Pertama, dikeluarkan 50% nya, kemudian dikeluarkan lagi sepertiga dari sisanya. Akhirnya minyak di dalam drum tinggal 40 liter. Berapa liter minyak di dalam drum itu sebelum dikeluarkan sama sekali?

Struktur masalah dapat dikonstruksi sebagai berikut.

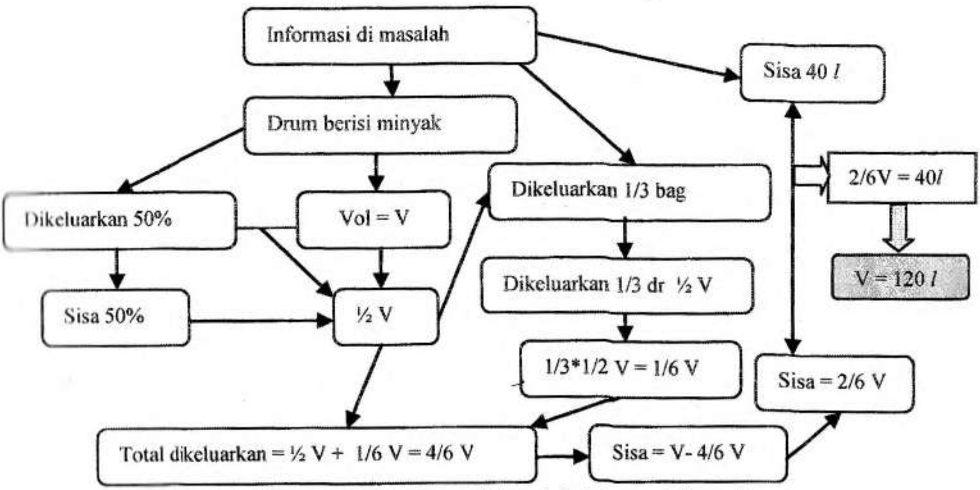
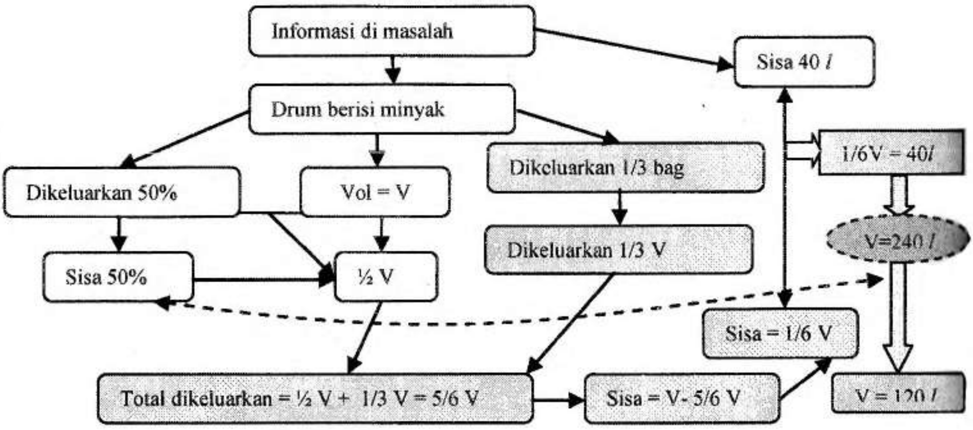


Diagram 2.2. Struktur Masalah Drum Minyak

Pada masalah tersebut ada beberapa informasi yang diberikan dan saling terkait. Pertama, ada drum berisi minyak sebut saja volumenya V. Minyak dalam drum dikeluarkan 50% nya dan tersisa 50% nya, sehingga dalam bentuk model diperoleh sisa volumenya dapat ditulis $V = \frac{1}{2}V$. Dari yang tersisa ($\frac{1}{2}$ V) dikeluarkan lagi $\frac{1}{3}$ nya, sehingga bisa dimaknai $\frac{1}{3}$ dari $\frac{1}{2}V$ atau ditulis $\frac{1}{6}$ V. Karena minyak dikeluarkan dua kali, yakni $\frac{1}{2}V$ dan $\frac{1}{6}$ V, maka total minyak yang dikeluarkan sama dengan $\frac{1}{2}$ V + 1/6 V = $\frac{4}{6}$ V. Sisa minyak di dalam drum volumenya = $V - \frac{4}{6}V = \frac{2}{6}$ V. Dari informasi diketahui bahwa sisa minyak setelah dikeluarkan dua kali tersisa 40 liter. Dengan demikian $\frac{2}{6}$ V = 40 liter dan diperoleh V = 120 liter.

Berdasarkan hasil kerja siswa pada Gambar 2.2., dapat digambarkan struktur berpikir siswa dalam mengonstruksi pemecahan masalahnya seperti berikut.



Keterangan

Kesalahan konstruksi

Diagram 2.3. Struktur Berpikir Siswa dalam Menyelesaikan Masalah Drum Minyak

Kesalahan konstruksi mulai terjadi ketika siswa menginterpretasi "$\frac{1}{3}$ bagian dari sisanya" dengan "$\frac{1}{3}$ bagian dari volume *utuh*". Kesalahan berlanjut pada proses berikutnya bahwa minyak yang dikeluarkan sebanyak $\frac{1}{2}$ V + $\frac{1}{3}$ V = $\frac{5}{6}$ V. Sehingga sisa minyak setelah dikeluarkan dua kali menjadi V − $\frac{5}{6}$ V = $\frac{1}{6}$ V. Setelah dihubungkan dengan sisa minyak setelah dikeluarkan dua kali 40 liter, seharusnya volume minyak semula v = 6 x 40 l = 240 liter, namun kesimpulan yang ditulis oleh siswa justru 120 liter. Secara kebetulan hasil akhirnya benar, namun proses berpikir yang dialami oleh siswa salah. Dia berpikir bahwa setelah diperoleh 240 liter (meskipun tidak dituliskan) dia ingat minyak yang dikeluarkan 50%, selanjutnya dia mengalikan 50% dengan 240 liter dan hasilnya 120 liter.

Untuk kasus kedua, struktur masalah dapat digambarkan berdasarkan masalah yang diberikan kepada siswa.

> *Panjang suatu persegi panjang bertambah 10%, sedangkan lebarnya bertambah 20%. Berapa persen pertambahan luas daerah persegi panjang tersebut?*

Struktur masalah dapat digambarkan dalam Diagram 2.4.

Informasi yang diberikan adalah ada persegi panjang (pp), sebut saja panjangnya p dan lebarnya l. Panjang dari persegi panjang tersebut ditambah 10% nya dan lebarnya ditambah 20% nya. Misalkan panjang "barunya" disebut p' dan lebar "barunya" disebut l', maka $p' = p + 10\%p = 1{,}1\ p$ dan $l' = l + 20\%l = 1{,}2\ l$. Misalkan luas daerah persegi panjang darunya L', maka L' = $p' \times l'$ = 1,1 $p \times$ 1,2 l = 1,32 pxl = 1,32 L = L + 32%L. Jadi pertambahan luasnya adalah 32%.

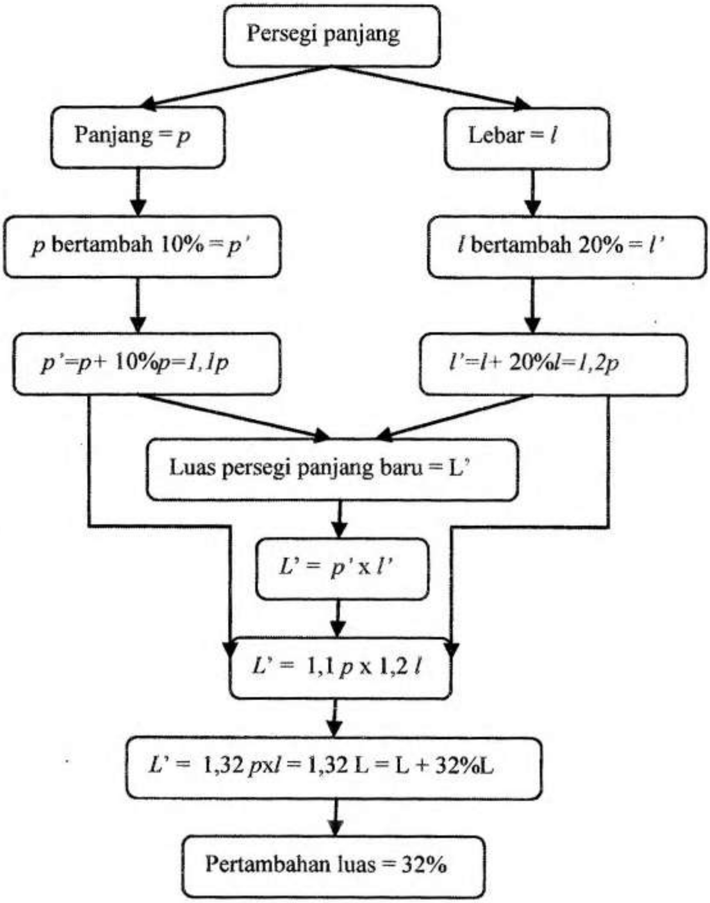


Diagram 2.4. Struktur Masalah Pertambahan Luas Daerah Persegi Panjang

Struktur masalah pada diagram 2.4 dapat digunakan untuk mendeteksi kesalahan konstruksi siswa dalam memecahkan masalah. Struktur berpikir siswa dalam memecahkan masalah dapat digambarkan dengan mengacu pada hasil kerja Gambar 2.3. dan indept interview.

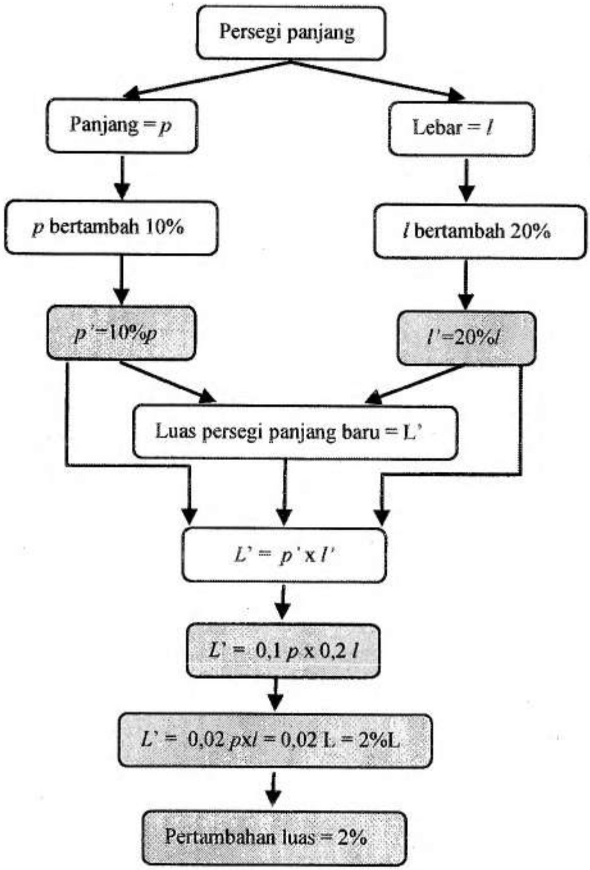


Diagram 2.5. Struktur Struktur Berpikir Siswa dalam Menyelesaikan Masalah Pertambahan Luas Daerah Persegi Panjang

Struktur berpikir siswa dalam menyelesaikan masalah dapat dibandingkan dengan struktur masalah luas daerah persegi panjang. Kesalahan konstruksi terjadi ketika siswa mengasimilasi pertambahan panjang 10% dengan "*panjang*" sama dengan 10% dan pertambahan lebar 20% dengan "*lebar*" sama dengan 20%. Konstruksi berlanjut dengan menghitung pertambahan luas daerah persegi panjang yang baru merupakan perkalian 10% x 20% = 0,1 x 0,2 = 0,02, diperoleh kesimpulan pertambahan luasnya adalah 2%.

Kesalahan konstruksi berakibat kesalahan beruntun sampai hasil yang diperoleh juga salah.

Berdasarkan dua contoh di atas, dapat diperoleh suatu kerangka konseptual untuk mengungkap kesalahan konstruksi dengan membandingkan antara struktur masalah dan struktur berpikir. Struktur masalah digunakan sebagai pembanding proses berpikir siswa dalam mengonstruksi konsep dan memecahkan masalah. Dengan perbandingan tersebut dapat digunakan untuk menganalisis terjadinya kesalahan dalam mengonstruksi dan memecahkan masalah matematika. Dalam hal ini ada beberapa proses terjadinya kesalahan konstruksi siswa, yakni: (a) lubang konstruksi, (b) lubang koneksi, (c) *mis-analogical thinking,* dan (d) *mis-logical thinking*

D. Rumusan Masalah

Hal penting yang menjadi kajian dalam proses belajar matematika adalah (1) bagaimana siswa mengonstruksi konsep dan memecahkan masalah matematika sehingga pengetahuan matematika siswa bertambah dari waktu ke waktu; (2) apa saja bentuk-bentuk kesalahan siswa dalam proses belajar matematika, terutama dalam mengonstruksi konsep dan pemecahan masalah matematika; (3) bagaimana proses terjadinya (a) lubang konstruksi, (b) lubang koneksi, (c) *mis-analogical thinking,* dan (d) *mis-logical thinking* dalam mengonstruksi konsep dan memecahkan masalah matematika.

BAB III
METODE PENELITIAN

A. Desain Penelitian

Penelitian ini dilakukan dalam dua tahap. *Tahap pertama,* mengidentifikasi dan mengarakterisasi jenis-jenis kesalahan siswa dalam mengonstruksi konsep matematika dan memecahkan masalah matematika. *Tahap kedua,* menelusuri terjadinya kesalahan konstruksi dengan menggunakan peta kognitif. Pada tahap pertama menggunakan analisis data deskriptif kuantitatif dan pada tahap kedua menggunakan analisis deskriptif kualitatif. Karena itu desain yang digunakan dalam penelitian ini adalah *mixed method.* Menurut Creswell (2012), untuk memilih desain *mixed methods* perlu mempertimbangkan 7 (tujuh) langkah seperti diagram berikut.

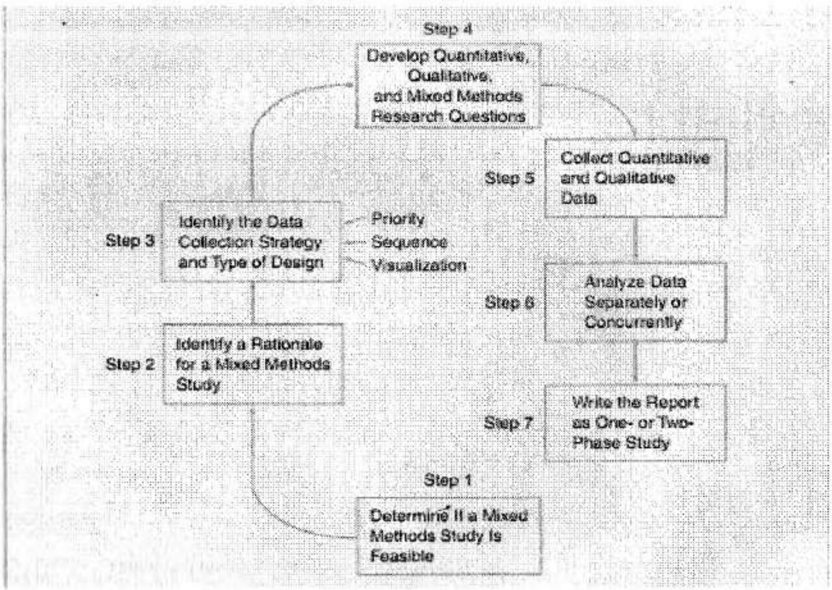


Diagram 3.1. Steps in Process of Conductng a Mixed Methods Study (diadopsi dari Creswell, 2012)

Penelitian ini didesain dengan *mixed methods* karena bertujuan untuk mengeksplorasi kesalahan siswa dalam mengonstruksi dan memecahkan masalah secara kuantitatif dan kualitatif. Eksplorasi secara kuantitatif dibutuhkan untuk menggambarkan seberapa besar kesalahan siswa dalam mengonstruksi konsep matematika dan memecahkan masalah, termasuk digunakan untuk menjelaskan di bagian mana saja siswa banyak mengalami kesalahan dalam mengonstruksi konsep matematika. Setelah menemukan sebaran kesalahan konstruksi konsep matematika, dilanjutkan dengan eksplorasi kualitatif. Dalam hal ini untuk menjawab masalah **"bagaimana terjadinya kesalahan siswa dalam mengonstruksi konsep dan memecahkan masalah matematika"**. Eksplorasi kualitatif juga dimaksudkan untuk menggambarkan proses konstruksi sedemikian hingga bisa terjadi kesalahan. Dengan demikian desain yang sesuai adalah penelitian *mixed methods*.

Mixed methods sebagai suatu desain penelitian yang "mencampur/menggabungkan" penelitian kuantitatif dan kualitatif. **Istilah "mencampur/menggabungkan" tidak berarti mencampur/menggabungkan dua paradigma yang saling bertentangan**, tetapi "lebih" pada upaya untuk saling melengkapi kekurangan masing-masing, sehingga menjadi penelitian yang lebih utuh. Creswell (2012) menjelaskan bahwa dalam pelaksanaannya ada dua jenis *mixed methods*, yakni *sequential* (berurutan) dan *concurrent* (bersamaan). *Mixed methods* "berurutan" dilakukan dengan menggunakan desain kuantitatif dilanjutkan kualitatif atau desain kualitatif dilanjutkan dengan kuantitatif. *Mixed method* "bersamaan" dimaksudkan sebagai penelitian yang dilakukan dengan menggali data dan mengolahnya secara bersamaan antara kuantitatif dan kualitatif. Lebih lanjut dijelaskan oleh

Creswell (2012) bahwa mixed methods - sequential berfungsi sebagai: *explanatory, exploratory,* atau *transformative*, sedangkan *mixed methods* - concurrent berfungsi sebagai triangulasi, *nested*, dan *transformative*.

Penelititian ini menggunakan desain *mixed methods - sequential* yang menggunakan jenis *explanatory*. Pada tahap pertama diidentifikasi jenis-jenis kesalahan siswa dalam mengonstruksi konsep dan menyelesaikan masalah matematika dengan menggunakan pendekatan kuantitatif. Selanjutnya ditelusuri proses terjadinya kesalahan konstruksi, sehingga bisa digunakan untuk menjelaskan terbentuknya kesalahan siswa dalam mengonstruksi konsep matematika dengan menggunakan pendekatan kualitatif. Penelusuran proses konstruksi diharapkan dapat digunakan untuk menjelaskan: bagaimana proses terjadinya (a) *pseudo contruction* (konstruksi semu), (b) *hole contruction* (lubang konstruksi, (c) *mis-analogical thinking*, dan (d) *mis-logical thinking* dalam mengonstruksi konsep dan memecahkan masalah matematika.

B. Subjek Penelitian

Subjek penelitian ini adalah siswa SMP di Kota Malang, Kabupaten Blitar, Kota Blitar, dan Kabupaten Tulungagung. Pada tahap pertama, diadakan tes penelusuran kesalahan siswa dalam mengonstruksi dan menyelesaikan masalah matematika yang melibatkan 391 siswa SMP yang tersebar di 4 (empat) kabupaten/kota. Tahap kedua, dilakukan penelusuran terjadinya kesalahan kepada 64 siswa dengan melakukan *think out loud* dan wawancara berbasis tugas.

C. Instrumen Penelitian

Instrumen penelitian dalam desain kuantitatif untuk menjaring kesalahan konstruksi konsep berupa instrumen utama dan instrumen pelacak. Instrumen utama berisi pernyataan yang menuntut siswa untuk menjustifikasi benar atau salah dengan disertai alasannya. Instrumen pelacak berupa pernyataan yang sudah disertai beberapa alasan, subjek diminta untuk menjawab setuju atau tidak setuju dengan alasannya. Instrumen pelacak dimaksudkan untuk memperjelas atau menjaring kemungkinan yang dipikirkan oleh siswa terkait dengan konsep matematika. Instrumen pelacak juga digunakan untuk menelusuri konstruksi yang terbentuk dalam pikiran siswa. Dengan demikian akan mempermudah menangkap kesalahan siswa dalam mengonstruksi konsep matematika. Instrumen untuk menjaring kesalahan siswa dalam memecahkan masalah matematika berupa 3 (tiga) soal problem solving, masing-masing terkait dengan materi garis singgung persekutuan dua lingkaran, faktor persekutuan terbesar, dan luas daerah. Secara lengkap instrumen penelitian ini tersaji pada lampiran 1.

Instrumen penelitian dalam desain kualitatif terdiri dari instrumen utama dan instrumen pendukung. Instrumen utamanya adalah peneliti dan instrumen pendukungnya adalah instrumen pelacak dan soal problem solving yang sudah disusun dalam desain kuantitatif. Dari hasil penelitian kuantitatif (tahap pertama) dilanjutkan dengan menelusuri lebih mendalam terjadinya kesalahan konstruksi dengan menggunakan peta kognitif. Karena itu peran peneliti sangat penting dalam desain kualitatif.

D. Prosedur Pengumpulan Data

Pengumpulan data dilakukan dengan memberikan masalah kepada siswa untuk diselesaikan. Pengumpulan data dilakukan dalam dua bentuk: (1) pengumpulan data dalam desain kuantitatif dan (2) pengumpulan data dalam desain kualitatif. Pengumpulan data dalam desain kuantitatif dilakukan dengan memberikan tes konstruksi konsep dan pemecahan masalah matematika kepada 391 siswa yang tersebar di 4 kabupaten/kota. Jawaban siswa dikelompokkan dalam tiga kemungkinan: benar, pseudo, dan salah. Jawaban "benar" terjadi jika siswa menjawab dengan benar dan mampu memberikan alasan secara benar. Jawaban "pseudo" terjadi bila siswa menjawab benar tetapi alasan yang dikemukakan salah. Jawaban "salah" terjadi jika siswa menjawab salah dan alasan yang dtuliskan mendukung kesalahannya.

Untuk menelusuri kesalahan konstruksi konsep matematika dan pemecahan masalah matematika, siswa diminta untuk menyelesaikan tugas konstruksi dan tugas pemecahan masalah sekaligus mengutarakannya secara keras apa yang sedang ia pikirkan. Peneliti merekam ungkapan verbal dari siswa dan mencatat perilaku (ekspresi) siswa, termasuk hal-hal unik yang dilakukan oleh siswa, ketika menyelesaikan masalah tersebut. Pengumpulan data semacam ini, menurut Olson, Dufffy, dan Mack (dalam Subanji, 2011) tergolong dalam metode ***Think Out Loud***. Ahli lain (Erricson and Simon, 1996; Calder & Sarah, 2002) menggunakan istilah ***Think Alouds***.

Calder & Sarah (dalam Subanji, 2011) menjelaskan tentang *think alouds* sebagai berikut:

Think alouds are a research tool originally developed by cognitive psychologists for the purpose of studying how people *solve problems. The basic idea behind a think aloud is that if a subject can be trained to think out loud while completing a defined task, then the introspections can be recorded and analyzed by researchers to determine what cognitive processes were employed to deal with the problem.*

Think alouds dikembangkan oleh ahli psikologi kognitif dengan tujuan untuk mempelajari bagaimana seseorang memecahkan masalah. Ketika seseorang memecahkan masalah, maka apa yang dipikirkan dapat direkam dan dianalisis untuk menentukan proses cognitive yang terkait dengan masalahnya.

Metode *Think Aloud* merupakan salah satu cara khusus mengungkap proses berpikir seseorang. Namun demikian metode ini memiliki beberapa keterbatasan: (1) Kesulitan mengungkap proses berpikir siswa yang mengalami kesulitan mengutarakan berpikirnya secara verbal, (2) Keterbatasan pada apa yang dapat diingat, dan (3) Kemampuan siswa untuk menjelaskan atau menjustifikasi dari perilakunya sendiri. Karena itu Calder dan Sarah (2006) menyarankan bahwa dalam pengambilan data perlu adanya pengkondisian siswa dalam mengungkapkan apa yang dipikirkan. Dalam pengambilan data penelitian ini, untuk mengurangi keterbatasan, peneliti mengondisikan siswa untuk mengungkapkan apa yang sedang dipikirkan dengan bahasa yang bebas.

E. Analisis Data

Analisis data dalam penelitian ini dilakukan dalam dua bentuk, yakni analisis data kuantitatif dan analisis data kualitatif. Analisis data kuantitatif dilakukan dengan menggunakan analisis deskriptif kuantitatif. Karakteristik kesalahan siswa dalam mengonstruksi konsep dan memecahkan masalah dideskripsikan dengan menggunakan persentase. Analisis data kualitatif dilakukan dengan langkah-langkah: (1) mentranskrip data verbal yang terkumpul, (2) menelaah seluruh data yang tersedia dari berbagai sumber, yaitu dari hasil *think out louds*, wawancara, pengamatan yang sudah dituliskan dalam catatan lapangan, dan hasil konstruksi konsep matematika; (3) mengadakan reduksi data dengan membuat abstraksi. Abstraksi merupakan usaha membuat rangkuman yang inti, proses, dan pernyataan-pernyataan yang perlu dijaga untuk tetap berada di dalamnya; (4) menyusun dalam satuan-satuan yang selanjutnya dikategorisasikan dengan membuat coding, (5) menggambarkan struktur berpikir siswa dalam menyelesaikan masalah, (6) analisis poses berpikir, (7) analisis hal-hal yang menarik, dan (8) penarikan kesimpulan.

Proses analisis data kualitatif dilakukan dengan menelaah data dari hasil *think out load* dan catatan lapangan. Jika data sudah cukup, maka dilanjutkan dengan reduksi. Sebaliknya jika data belum cukup dilanjutkan dengan wawancara berbasis tugas. Dari hasil reduksi dilakukan kategorisasi atau pengkodean dan dilanjutkan dengan menggambarkan struktur berpikir siswa. Struktur berpikir dapat digunakan untuk menelusuri kesalahan siswa dalam mengonstruksi konsep matematika dan pemecahan masalah matematika.

Adapun proses analisis data dapat digambarkan seperti diagram 3.2. berikut.

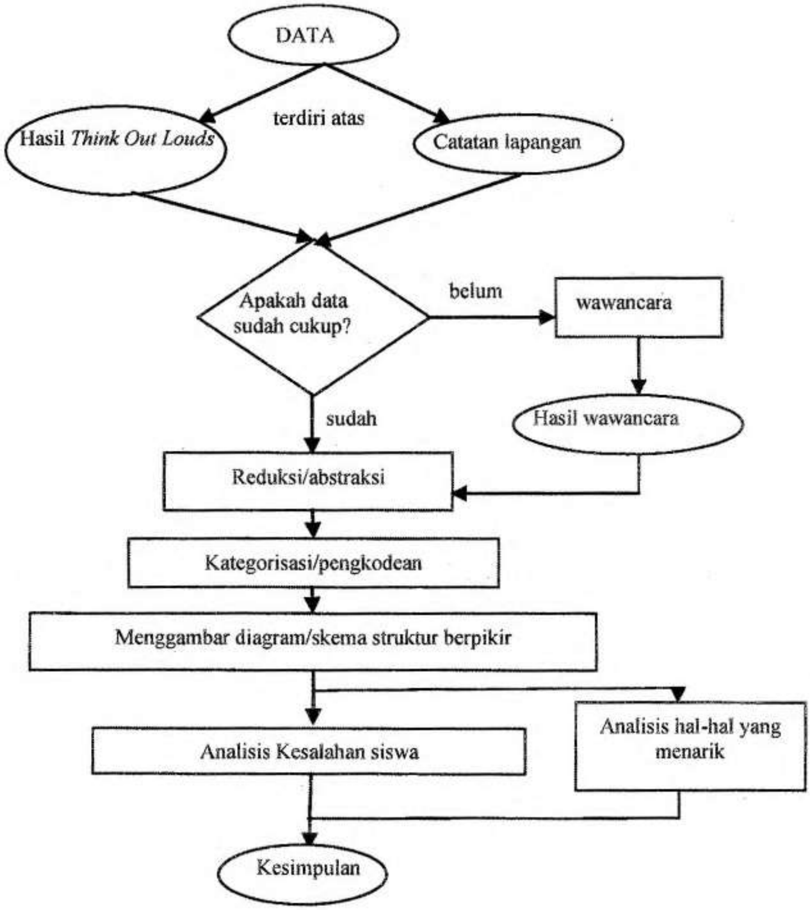


Diagram 3.2 Proses Analisis Data

BAB IV
KARAKTERISTIK KESALAHAN SISWA DALAM MENGONSTRUKSI KONSEP MATEMATIKA

A. Karakteristik Kesalahan Siswa dalam Mengonstruksi Konsep Operasi Bilangan

Kesalahan berpikir siswa dalam mengonstruksi konsep operasi bilangan dibagi dalam empat bentuk: operasi bilangan bulat, operasi pecahan, pangkat dan akar. Jawaban siswa diklasifikasikan berdasarkan jawaban benar dan jawaban salah. Jawaban benar diklasifikasikan dalam tiga bentuk: benar sungguhan, pseudo benar, dan perlu klarifikasi. Selanjutnya dikelompokkan konsistensi dalam memberikan jawaban. Apabila jawaban benar pada soal utama dan berlanjut benar pada soal pelacak, maka jawaban siswa tersebut adalah konsisten, sebaliknya disebut tidak konsisten.

1. Deskripsi Data Hasil Konstruksi Operasi Bilangan Bulat

Hasil pengelompokkan alasan siswa dalam menjawab soal utama dan soal pelacak disajikan seperti Tabel 1 berikut.

Tabel 1. Data Rangkuman Alasan Siswa terhadap Soal -4 – 3 = -7

Alasan	Benar			Salah	Konsisten	
	True	Pseudo	Klarifikasi		Ya	Tdk
-4 – 3 = -7 (karena punya hutang 4 hutang lagi 3, hutangnya menjadi 7)	0	81	15	8	92	12
Karena negatif dikurang positif hasilnya negatif	62	10	13	22	97	10
Karena -4 - 3= -7 sama dengan -4 + (-3) = -7	36	0	3	14	42	11

Karena bilangan negatif dikurangi bilangan positif itu menjadi ditambah. Hasilnya negatif	19	22	5	12	51	7
Mengulang soal	0	0	15	22	30	7
Tidak memberi alasan	0	0	17	15	28	4
Jumlah	117	113	68	93	340	51

Dari Tabel 1 terlihat bahwa masih banyak siswa yang menjawab salah untuk masalah -4 – 3 = -7, yakni sebanyak 93 (23,7%) siswa dari 391 orang. Siswa yang mengalami berpikir pseudo mencapai 113 (28,9%) orang. Siswa tersebut menjawab benar, namun tidak bisa memberi alasan yang logis.

Untuk soal kedua -4 – (-3) = -1 siswa memberikan alasan beraneka ragam dan dapat dikelompokkan menjadi 7 (tujuh) macam. Hasil rekapan alasan siswa dalam menyelesaikan masalah kedua disajikan pada Tabel 2 berikut.

Tabel 2. Data Rangkuman Alasan Siswa terhadap Soal -4 – (-3) = -1

Alasan	Benar			Salah	Konsisten	
	True	Pseudo	Klarifikasi		Ya	Tdk
Karena negatifnya lebih besar dari positif maka hasilnya ditambah	41	16	7	12	73	3
-4-(-3) = -4 + 3 (karena negatif ketemu negatif adalah positif, negatif dikali negatif hasilnya positif)	17	72	12	19	103	17
Karena hutang 4 dan dibayar 3, hutangnya tinggal 1	20	31	4	12	52	15
Karena negatif dikurangi negatif hasilnya dikurangi	19	22	5	12	51	7

Karena negatif di depannya lebih besar	17	0	15	4	25	11
Mengulang soal	0	0	15	8	17	6
Tidak memberi alasan	6	0	0	5	11	0
Jumlah	120	141	58	72	332	59

Dari Tabel 2 terlihat bahwa proses berpikir siswa yang paling banyak adalah berpikir pseudo, sebanyak 141 (36,1%) siswa dari 391 orang. Kesalahan masih terjadi pada 72 orang siswa. Jawaban siswa cenderung konsisten dalam memberi alasan soal utama dan soal pelacak.

Data rangkuman alasan yang dibuat oleh siswa dalam menyelesaikan soal utama dan pelacak soal nomor 3: 4 x 2 + 3 = 4 x (2 + 3) disajikan seperti Tabel 3 berikut.

Tabel 3. Data Rangkuman Alasan Siswa untuk Soal 4 x 2 + 3 = 4 x (2 + 3)

Alasan	Benar			Salah	Konsisten	
	True	Pseudo	Klarifikasi		Ya	Tdk
Karena perkalian didahulukan dan dilanjutkan dengan penjumlahan	42	31	6	32	102	9
Karena 2+3 merupakan penjumlahan, jadi harus dipisah (termasuk karena sifat komutatif)	36	37	10	21	85	19
Karena 4 x 2 + 3 = 11 dan 4 x (2 + 3) = 20	74	0	4	9	70	17
Tidak ada alasan	3	10	5	10	17	11
Karena penjumlahan harus dijumlahkan terlebih dahulu	0	15	3	15	30	3

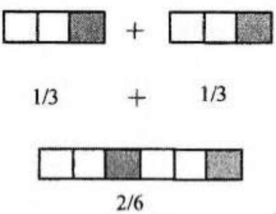
Dengan diberinya tanda tutup kurung, akan memudahkan cara menghitungnya	0	21	0	7	17	11
Jumlah	155	114	28	94	281	110

Dalam menyelesaikan soal 4 x 2 + 3 = 4 x (2 + 3), masih banyak siswa yang mengalami berpikir pseudo, sebanyak 114 (29,16%) siswa dari 391 orang. Siswa yang menjawab salah masih relatif tinggi, yakni 94 (24%) siswa. Kesalahan banyak terjadi karena siswa hanya mengingat sifat-sifat dalam operasi campuran, bahwa ada sifat komutatif, distributif, dan mendahulukan perkalian daripada penjumlahan. Namun ingatan tersebut bersifat samar-samar, sehingga tidak bisa menerapkan pada masalah yang sesuai.

Data rangkuman alasan yang dibuat oleh siswa dalam menyelesaikan soal utama dan pelacak soal nomor 4: $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ disajikan seperti Tabel 4 berikut.

Tabel 4. Data Rangkuman Alasan Siswa terhadap Soal $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

Alasan	Benar			Salah	Konsisten	
	True	Pseudo	Klarifikasi		Ya	Tdk
1/3 + 1/3 = 2/6 (karena memenuhi ilustrasi berikut.	12	31	6	32	72	9



Penyebut disamakan dan tidak boleh dijumlah dalam operasi penjumlahan bentuk pecahan	32	32	10	24	85	13
Karena penyebutnya ditambahkan padahal mencari penyebut dicari KPK-nya	22	42	4	12	68	12
Karena penyebutnya sudah sama	21	15	5	12	47	6
Karena pembilang dan penyebutnya sama jika ditambah hasilnya 2/6	0	0	15	64	62	17
Jumlah	87	120	40	144	334	57

Untuk masalah akar dan pangkat, banyak siswa yang mengalami kesalahan, mencapai 144 (36,8%) siswa dari 391 orang. Siswa yang berpikir pseudo benar mencapai 120 (30, 69%) orang.

Data rangkuman alasan yang dibuat oleh siswa dalam menyelesaikan soal utama dan pelacak soal nomor 5: $\sqrt{3}+\sqrt{3}=\sqrt{6}$ disajikan seperti Tabel 5 berikut.

Tabel 5. Data Rangkuman Alasan Siswa terhadap Soal $\sqrt{3}+\sqrt{3}=\sqrt{6}$

Alasan	Benar			Salah	Konsisten	
	True	Pseudo	Klarifikasi		Ya	Tdk
$\sqrt{3}+\sqrt{3}=\sqrt{6}$ (karena $\sqrt{3+3}=\sqrt{3}+\sqrt{3}=\sqrt{6}$)	0	15	12	77	90	14
Karena $\sqrt{3}+\sqrt{3}=\sqrt{6}$ sama $3+3=6$	0	33	9	39	78	3
Karena sama-sama diakar	18	32	5	34	78	11
Tidak ada alasan	12	9	7	19	42	5
Karena akar jika ditambah akar hasilnya akar kuadrat	15	22	12	21	52	18
Jumlah	42	118	45	186	340	51

Untuk masalah akar dan pangkat, banyak siswa yang mengalami kesalahan, mencapai 186 (47,6%) siswa dari 391 orang. Siswa yang berpikir pseudo benar mencapai 118 (30,2%) orang. Kesalahan yang terjadi karena siswa menggunakan berpikir analogi. Mereka menerapkan sifat operasi bilangan bulat langsung diterapkan pada bilangan akar.

2. Kesalahan dalam mengonstruksi operasi bilangan bulat

Pada masalah bilangan bulat disajikan 3 konstruksi: bilangan negatif dikurangi dengan bilangan positif (-4 - 3 = -7), bilangan negatif dikurangi dengan bilangan negatif [-4 - (-3)], dan operasi campuran 4 x 2 + 3 = 4 x (2 + 3). Dalam menyelesaikan masalah pertama banyak siswa yang menjawab bahwa -4 - 3 = -7 adalah benar dengan alasan punya hutang 4 hutang lagi 3, hutangnya menjadi 7. Selanjutnya kelompok siswa yang menjawab seperti ini disebut kelompok subjek 1 (S1).

Jawaban tersebut konsisten dengan jawaban S1 pada soal pelacak bahwa −4 direpresentasikan dengan hutang 4, dikurangi 3 (−3) direpresentasikan dengan hutang 3, dan hasilnya hutang 7 merepresentasikan -7. Adapun hasil jawaban siswa pada soal pelacak disajikan seperti berikut.

No	Pernyataan	Alasan	Setuju	Tidak Setuju
1	-4-3=-7	-4 - 3 = -7 (karena punya hutang 4 hutang lagi 3 hutangnya menjadi 7)	X	

Hal ini menunjukkan bahwa dalam mengonstruksi bilangan negatif dilakukan dengan menggunakan konteks hutang. Dalam hal ini terdapat masalah bahwa subjek menyamakan lambang bilangan negatif 4 (–4) dengan operasi minus "–" yang berarti dikurangi 3 (–3). Hal ini akan bermasalah ketika siswa dihadapkan pada masalah -4 – (-3) Subjek yang sama mengonstruksi masalah -4 – (-3) = -1 dengan alasan "negatif ketemu negatif" sama dengan positif -4 – (-3) = -4 + 3. Dilanjutkan dengan punya hutang 4 dibayar 3 maka hutangnya tinggal 1, sehingga -4 – (-3) = -1. Dalam kasus tersebut, subjek mengalami proses berpikir pseudo "benar". Mereka bisa menjawab dengan benar tetapi alasannya salah. Ketika memberi alasan negatif ketemu negatif sama dengan positif, S1 menyamakan makna simbol "–" pada kasus – (-3). Padahal simbol "—" pada bagian pertama merupakan operasi pengurangan (minus), sedangkan simbol "—" pada bagian kedua merupakan lambang bilangan negatif. S1 tidak bisa menjustifikasi kenapa negatif ketemu negatif menjadi positif.

2	-4-(-3)=-1	X		karena jika ada (–) bertemu dengan (–) sama dengan (+) maka -4+3=-1

Jawaban S1 konsisten dengan jawaban pada soal pelacak bahwa negatif ketemu negatif hasilnya positif –(–3) = 3. Adapun hasil dari jawaban siswa disajikan seperti berikut.

7	$-4-(-3)=-1$	$-4-(-3)=-4+3$ (karena negatif bertemu negatif adalah positif, negatif dikali negatif hasilnya positif)	X	

Proses berpikir pseudo siswa dalam menyelesaikan masalah terkait operasi bilangan bulat terjadi dengan tahapan: (1) membuat koneksi bilangan bulat (khususnya bilangan negatif) dengan hutang, (2) mengoperasikan bilangan dengan membuat proses transaksi, (3) mengubah hasil transaksi menjadi bilangan bulat. Proses berpikir pseudo siswa dalam menyelesaikan soal terkait operasi bilangan bulat dapat digambarkan sebagai berikut.

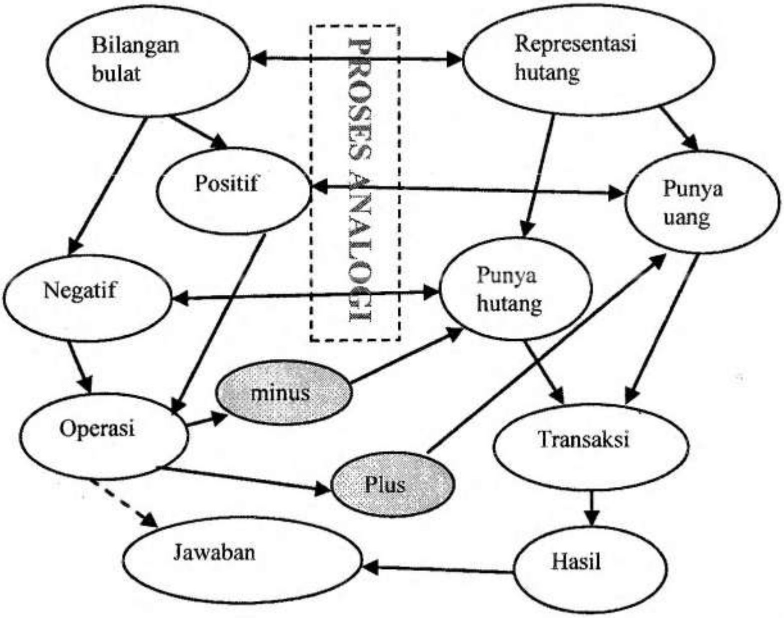


Diagram 4. Proses analogi siswa terhadap bilangan bulat negatif dan hutang

Terdapat proses yang salah dalam mengonstruksi konsep operasi bilangan bulat. Dalam hal ini menyamakan antara lambang bilangan dengan operasi bilangan. Meskipun jawabannya benar, namun alasan yang digunakan tidak tepat. Karena itu dalam berpikir siswa terjadi berpikir pseudo benar.

Kesalahan pada operasi bilangan bulat masih banyak terjadi pada siswa ketika mengonstruksi konsep operasi bilangan $4 \times 2 + 3 = 4 \times (2 + 3)$. Siswa ingat beberapa konsep terkait dengan operasi bilangan bulat, yakni ada sifat distributif, sifat komutatif, dan mendahulukan operasi perkalian daripada penjumlahan. Namun siswa salah dalam menempatkan sifat tersebut. Siswa kelompok pertama menjawab setuju bahwa $4 \times 2 + 3 = 4 \times (2 + 3)$ dengan alasan karena dengan diberikan tanda kurung tutup akan memudahkan cara berhitungnya.

4	$4 \times 2 + 3 = 4 \times (2 + 3)$	X		karena dengan di berinya tanda kurung tutup akan memudahkan cara berhitung.

Siswa memandang bahwa kurung hanya berfungsi sebagai tanda untuk mempermudah hitungan. Siswa kelompok kedua membenarkan pernyataan $4 \times 2 + 3 = 4 \times (2 + 3)$ karena sifat komutatif. Dia hanya ingat bahwa ada sifat komutatif dalam operasi penjumlahan atau perkalian. Namun konteks yang ada kurang sesuai jika digunakan sifat komutatif, karena sifat komutatif menyatakan bahwa $a + b = b + a$.

4	$4 \times 2 + 3 = 4 \times (2 + 3)$	X		karena sifat komutatif

Kesalahan siswa tersebut merupakan berpikir pseudo, dia hanya ingat secara samar-samar ada hukum komutatif dalam operasi perkalian, tetapi tidak tahu persis bagaimana berlakunya sifat komutatif tersebut.

Siswa kelompok ketiga, mengalami kesalahan dalam mengonstruksi konsep operasi bilangan dengan memberikan alasan bahwa berlakunya $4 \times 2 + 3 = 4 \times (2 + 3)$ karena $4 \times (2 + 3)$ harus di dalam kurung seperti itu.

4	$4 \times 2 + 3 = 4 \times (2 + 3)$	X		benar karena 4x (2+3) harus didlm kurung seperti itu.

Siswa kelompok satu juga menjawab setuju pada soal pelacak bahwa perkalian didahulukan daripada penjumlahan.

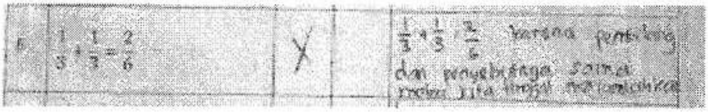
4	$4 \times 2 + 3 = 4 \times (2 + 3)$	Karena perkalian didahulukan dan dilanjutkan dengan penjumlahan.	X	

Kesalahan-kesalahan siswa dalam mengonstruksi operasi campuran pada bilangan bulat menunjukkan bahwa siswa banyak melakukan berpikir pseudo. Mereka mengenal sifat-sifat operasi bilangan bulat, seperti komutatif, asosiatif, dan mendahulukan perkalian daripada penjumlahan, namun siswa tidak bisa menggunakan sifat-sifat operasi bilangan tersebut untuk menyelesaikan masalah.

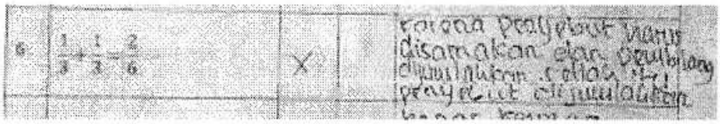
3. Kesalahan dalam mengonstruksi operasi pecahan

Kesalahan konstruksi pada masalah bilangan pecahan masih banyak terjadi dengan menjawab benar pernyataan $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$. Alasan yang banyak dilakukan bahwa dalam menjumlahkan pecahan dilakukan dengan menyamakan penyebut dan setelah penyebutnya sama dijumlahkan.

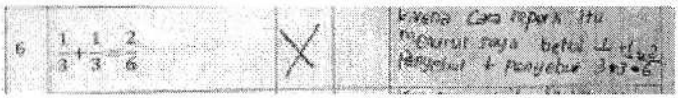
Seakan-akan alasan tersebut benar, namun kenyataan yang dilakukan oleh siswa adalah menjumlahkan pembilang dengan pembilang dan menjumlahkan penyebut dengan penyebut. Beberapa kesalahan konstruksi yang dialami oleh siswa dengan bahasa yang berbeda-beda tetapi kesalahannya sama disajikan seperti berikut.



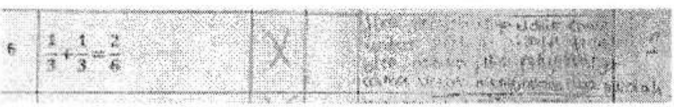
Alasan siswa: karena pembilang dan penyebutnya sama maka tinggal menjumlahkan.



Alasan siswa: karena penyebut harus disamakan dan pembilang dijumahkan. Setelah itu penyebut dijumlahkan

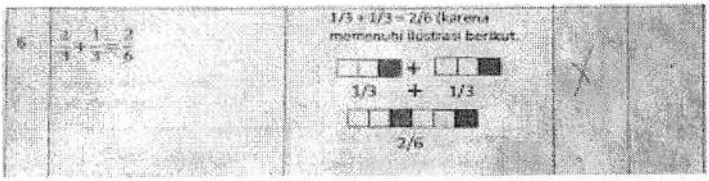


Alasan: karena cara seperti itu menurut saya betul $\frac{1+1}{3+3}=\frac{2}{6}$



Alasan siswa: jika penyebutnya tidak sama untuk menjumlahkannya tidak bisa. Jika penyebutnya sama untuk menjumlahkan mudah.

Dia hanya ingat bahwa dalam penjumlahan pecahan yang paling penting adalah menyamakan penyebut. Proses berikutnya hanya ingat harus ditambahkan. Hal ini menunjukkan bahwa terjadi proses konstruksi yang terputus sehingga menyebabkan kesalahan.



Ketika diberikan soal pelacak, siswa secara konsisten menjawab benar pernyataan tersebut. Hal ini menunjukkan bahwa dia yakin dengan jawaban yang diberikan. Proses berpikir siswa tersebut dapat digambarkan pada diagram 5.

Proses konstruksi berlangsung baik sampai menyamakan penyebut dan menjumlahkan pembilang dengan pembilang, namun kesalahan terjadi ketika siswa menambah konstruksi menjumlahkan penyebut dengan penyebut.

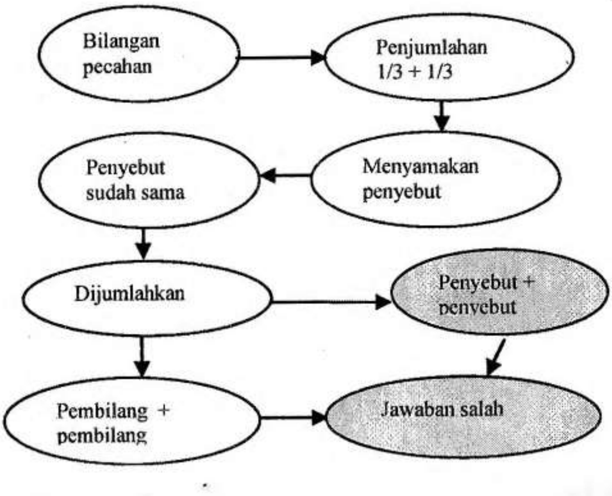
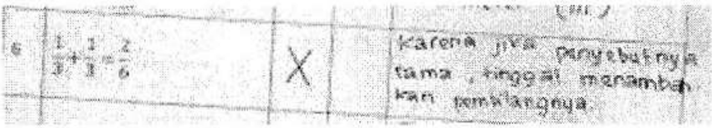
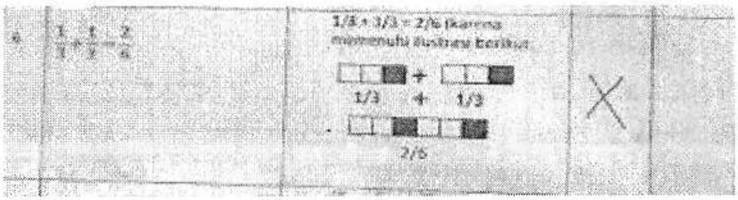


Diagram 5. Proses berpikir siswa dalam konstruksi yang terputus

Siswa lain ada yang mengalami berpikir pseudo dalam mengonstruksi operasi bilangan pecahan. Siswa sudah berpikir bahwa menjumlahkan pecahan dilakukan dengan menyamakan penyebut dan menjumlahkan pembilangnya, namun dia membenarkan jawaban $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$. Hal ini menunjukkan terjadinya proses berpikir pseudo salah.



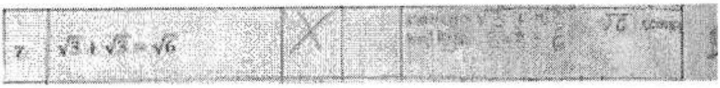
Jawaban siswa tersebut juga diperkuat dengan pembenaran terhadap soal pelacak berikut.



Jawaban tersebut menunjukkan bahwa terjadi konsistensi jawaban siswa. Dalam hal ini siswa mengalami proses berpikir pseudo salah (sebenarnya siswa bisa berargumen, namun jawaban yang diberikan salah).

4. Kesalahan dalam mengonstruksi operasi akar dan pangkat

Kesalahan konstruksi pada masalah akar bilangan masih banyak terjadi. Ketika diberikan pernyataan $\sqrt{3}+\sqrt{3}=\sqrt{6}$ banyak siswa menjawab benar dengan alasan penjumlahan tersebut memiliki sifat seperti penjumlahan bilangan biasa. Beberapa alasan dari siswa disajikan seperti berikut.



Alasan siswa: karena $\sqrt{3}+\sqrt{3}=\sqrt{6}$ sama halnya 3 + 3 = 6

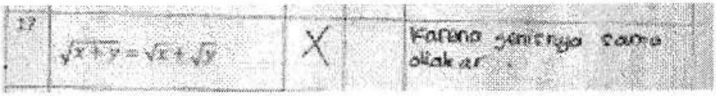
Alasan siswa: karena $\sqrt{3}+\sqrt{3}=\sqrt{6}$ karena $\sqrt{3}+\sqrt{3}=\sqrt{3+3}=$ $\sqrt{6}$

Alasan siswa: karena jenisnya sama maka $\sqrt{3}+\sqrt{3}$ dapat dijumlahkan dan hasilnya $\sqrt{6}$.

Kesalahan konstruksi operasi akar bilangan terjadi karena siswa menganalogikan sifat bilangan akar dengan sifat bilangan biasa. Proses berpikir siswa cukup sederhana, yakni mentransformasi sifat operasi penjumlahan bilangan bulat ke operasi penjumlahan akar. Hal ini menunjukkan bahwa siswa mengalami kesalahan konsep operasi bilangan akar.

Kesalahan konsep tersebut dilakukan oleh siswa secara konsisten. Ketika siswa diberi soal akar bilangan dalam bentuk lain (menggunakan variabel), kesalahannya sama dengan ketika soalnya dalam bentuk bilangan. Adapun hasil kerja siswa untuk akar bilangan (menggunakan variabel) disajikan seperti berikut.

Alasan siswa: karena memenuhi sifat $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$



Alasan siswa: karena jenisnya sama-sama akar

Berdasarkan alasan yang diungkapkan, terlihat bahwa siswa tidak memahami konsep dan sifat-sifat akar suatu bilangan. Hal ini juga diperkuat dengan persetujuan terhadap soal pelacak, bahwa berlakunya penjumlahan akar tersebut, karena bentuk $\sqrt{xy}=\sqrt{x}\sqrt{y}$. Proses berpikir siswa dalam mengonstruksi konsep operasi akar bilangan dan terjadinya kesalahan konsep tersebut dapat digambarkan sebagai berikut.

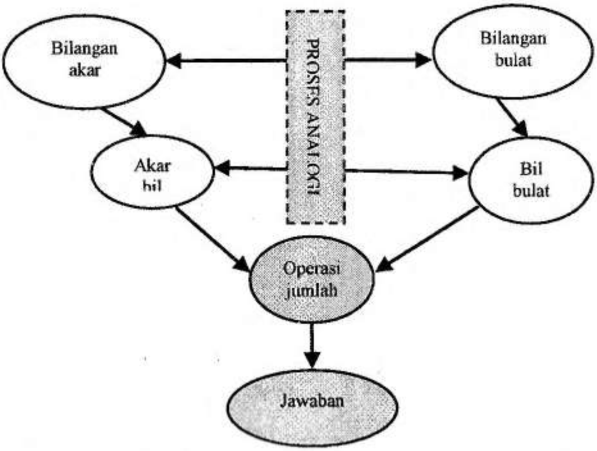
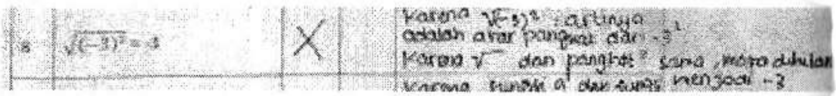


Diagram 6. Proses analogy siswa terhadap bilangan bulat dan akar bilangan

Kesalahan konstruksi operasi penjumlahan bilangan akar kuadrat terjadi pada siswa ketika diberikan masalah $\sqrt{3}+\sqrt{3}=\sqrt{6}$ dan $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$. Siswa mengalami kesalahan dalam mengonstruksi konsep penjumlahan akar kuadrat, karena mereka tidak bisa membedakan sifat operasi bilangan antara bilangan bulat dan bilangan dalam bentuk akar. Mereka menganalogikan $\sqrt{3}+\sqrt{3}=\sqrt{6}$ dengan 3 + 3 = 6. Kesalahan konsep tersebut berdampak pada kesalahan hasil akhirnya. Mestinya konsep penjumlahan tersebut dapat dilakukan dengan cara: $\sqrt{3}+\sqrt{3}=(1+1)\sqrt{3}=2\sqrt{3}$.

Kesalahan bentuk akar yang kedua adalah ketika siswa dihadapkan pada masalah $\sqrt{(-3)^2}=-3$. Jawaban siswa yang mengalami kesalahan konstruksi konsep akar bisa dikelompokkan menjadi dua bentuk alasan, seperti hasil kerja berikut.

Alasan siswa: hasil dari (-3)² = -9 dan $\sqrt{-9} = -3$



Alasan siswa: karena $\sqrt{(-3)^2}$ diartikan sebagai akar pangkat dari (-3)². Karena akar dari pangkat dua dapat disederhanakan, maka akar dan pangkat saling menghilangkan dan hasilnya menjadi -3.

Dari jawaban siswa tersebut terlihat bahwa terdapat beberapa tahapan kesalahan konsep. Siswa pada kelompok jawaban pertama mengalami kesalahan konsep dalam menentukan kuadrat dari -3 (hasilnya (-3)² = 9) dan berlanjut pada kesalahan konsep menarik akar ($\sqrt{-9} = -3$). Pada kelompok jawaban kedua mengalami kesalahan pada proses mengubah akar menjadi pangkat $\frac{1}{2}$. Siswa berpikir bahwa akar dan pangkat setara, sehingga pangkat dan akar bisa saling meniadakan atau dengan kata lain $((-3)^2)^{\frac{1}{2}} = (-3)^1 = -3$. Siswa kelompok ini, tidak menggunakan definisi akar pangkat dua dari suatu bilangan. Proses yang dilakukan seharusnya mulai dari $(-3)^2 = 9$ dan $\sqrt{9} = 3$. Dalam definisi formal $\sqrt{x^2} = |x|$. Hasil akar dari suatu bilangan positif (atau nol) adalah bilangan positif atau nol. Hal ini dapat dipahami secara masuk akal, bahwa operasi pangkat dan akar adalah setara, sehingga $\sqrt{x^2}$ bisa dihitung dengan menguadratkan terlebih dahulu dan dilanjutkan dengan menarik akar kuadrat.

Kesalahan konsep yang terjadi pada siswa konsisten dengan jawaban pada soal pelacak. Siswa setuju dengan alasan bahwa $\sqrt{(-3)^2} = -3$ karena $\sqrt{x^2} = x$. Adapun jawaban siswa terkait dengan kesalahan konsep akar dan pangkat seperti disajikan pada gambar berikut.

8	$\sqrt{(-3)^2} = 3$	$\sqrt{(-3)^2} = -3$ (karena $\sqrt{x^2} = x$)		

Proses berpikir siswa kelompok pertama mengalami kesalahan konsep dua tahap dalam menyelesaikan masalah akar dan pangkat, seperti diagram berikut.

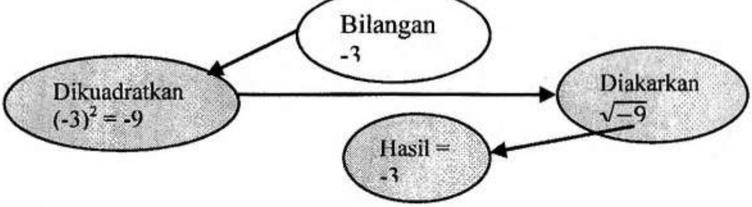


Diagram 7. Proses berpikir siswa tipe pertama dalam menyelesaikan masalah akar dan pangkat

Dari proses berpikir siswa kelompok pertama, terlihat bahwa dia sudah mengalami kesalahan konsep sejak awal $(-3)^2 = -9$. Siswa tersebut menganggap bahwa $(-3)^2 = -3^2 = -9$. Kesalahan ini konsisten terjadi jika dilihat dari hasil penyelesaian $\sqrt{-9} = -3$. Siswa melihat akar dari negatif sembilan, sebagai bentuk negatif dari akar sembilan. Karena akar sembilan adalah tiga, sehingga negatif dari akar sembilan adalah negatif 3. Kesalahan yang dialami oleh siswa tersebut merupakan kesalahan konsep.

Proses berpikir siswa kelompok kedua yang mengalami kesalahan konsep dalam menyelesaikan masalah akar dan pangkat dapat digambarkan sebagai berikut.

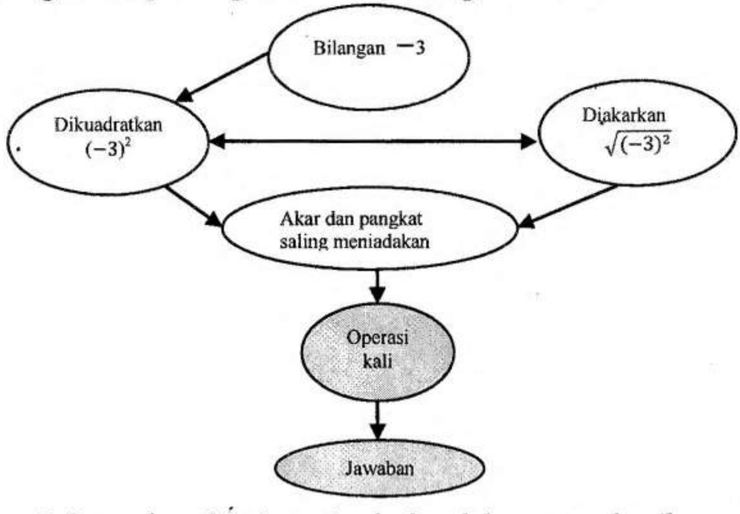


Diagram 8. Proses berpikir siswa tipe kedua dalam menyelesaikan masalah akar dan pangkat

Kesalahan pada siswa kelompok kedua, terjadi pada saat mengoperasikan secara bersama-sama pangkat dua dan akar. Yang dilakukan bukan mengoperasikan -3 dengan dipangkatkan 2 dan dilanjutkan dengan memangkatkan dengan setengah (mengubah akar menjadi pangkat setengah). Dominasi berpikir siswa kelompok kedua adalah memahami sifat pangkat dipangkatkan lagi sama dengan mengalikan pangkat tersebut. Sehingga diperoleh hasil pangkatnya menjadi satu (saling meniadakan).

B. Karakteristik Kesalahan Siswa dalam Mengonstruksi Konsep Operasi Bentuk Aljabar

Kesalahan berpikir siswa dalam mengonstruksi konsep operasi bentuk aljabar dibagi dalam 4 bentuk: *kesalahan dalam mengonstruksi operasi penjumlahan bentuk aljabar variabel sejenis, penjumlahan bentuk aljabar variabel tak sejenis, operasi pengkuadratan,* dan *operasi akar kuadrat dari bentuk aljabar.*

1. Kesalahan Siswa dalam Mengonstruksi Konsep Penjumlahan Bentuk Aljabar Suku Sejenis

Untuk mengungkap kesalahan siswa dalam mengonstruksi penjumlahan bentuk aljabar suku sejenis kepada siswa diberikan pernyataan $2x + 3x = 5x$. Siswa diminta menilai pernyataan tersebut dengan dua pilihan setuju dan tidak setuju dengan disertai alasan.

Tabel 7. Data Rangkuman Alasan Siswa terhadap Soal $2x + 3x = 5x$

Alasan	Benar			Salah	Konsisten	
	True	Pseudo	Klarifikasi		Ya	Tdk
Misalkan x = buku, maka dua buku ditambah tiga buku hasilnya lima buku	0	64	12	15	85	6

Karena variabelnya sama sehingga dapat dijumlahkan	52	12	0	27	85	6
Karena koefisiennya sama, jadi bisa dijadikan satu	0	34	5	12	44	7
Karena 2x + 3x = 5x sama dengan 2 + 3 = 5	3	47	7	21	72	6
Mengulang soal	0	10	4	14	25	3
Tidak ada alasan	0	0	14	0	9	5
$2x + 3x = (5x)^2$	0	0	0	21	19	2
$2x + 3x = 5x^2$	0	0	0	17	16	1
Jumlah	55	167	42	127	355	36

Dari Tabel 7 terlihat bahwa masih banyak siswa (42, 7%) yang menjawab benar, namun alasan yang diberikan "salah". Kebanyakan alasan yang diberikan oleh siswa adalah x sebagai benda, seperti buku, pensil, sapi, kambing, dan sebagainya. Padahal x dalam konteks aljabar adalah bilangan. Sehingga $2x + 3x$ bisa dijumlahkan karena ada sifat dalam operasi bilangan (yaitu sifat distributif) yang menjamin berlakunya penjumlahan $2x + 3x = (2 + 3)x = 5x$. Apabila x dimaknai sebagai benda, maka tidak ada sifat yang menjamin penjumlahan tersebut. Penjumlahan hanya bisa dilakukan dalam konteks kuantitas (bilangan). Hal ini menunjukkan bahwa siswa mengalami proses berpikir pseudo "benar", meskipun jawabnya benar, namun sebenarnya siswa tidak mampu memberi alasan yang tepat. Proses berpikir pseudo "benar" yang lain juga terjadi ketika siswa memberi alasan terkait dengan gradient. Siswa menganggap bentuk $2x + 3x$ terkait dengan persamaan garis. Siswa teringat dengan persamaan garis $y = 2x$ dan $y = 3x$, di mana masing-masing memiliki gradien 2 dan 3. Alasan bahwa graiden sama langsung dijumlahkan hanya ingatan samar-samar saja.

Begitupula ketika menjumlahkan $2x + 3y$ siswa menjawab benar, namun alasan yang dikemukakan tidak sesuai, yakni karena gradiennya tidak sama sehingga tidak bisa dijumlahkan. Kasus kedua siswa diminta untuk menjustifikasi pernyataan $2x + 3y = 5xy$. Banyak siswa yang mengalami kesalahan. Adapun sebaran alasan siswa disajikan seperti Tabel 8 berikut.

Tabel 8. Data Rangkuman Alasan Siswa terhadap Soal $2x + 3y = 5xy$

Alasan	Benar			Salah	Konsisten	
	True	Pseudo	Klarifikasi		Ya	Tdk
$2x + 3y = 5xy$ (karena 2 kambing ditambah 3 sapi bisa menjadi 5 sapi kambing)	0	62	3	23	82	6
Karena koefisien 2 dan 3 berbeda, jadi tidak boleh dijadikan satu	42	24	2	17	81	4
Karena mempunyai variabel yang tidak sama	82	5	3	17	70	37
$2x + 3y = 5xy$; karena $5 + xy = 5xy$	0	21	5	16	32	10
Mengulang soal	0	15	11	15	35	6
Jumlah	55	167	42	127	355	36

Kesalahan siswa dalam menjawab pertanyaan $2x + 3y = 5xy$ karena menganggap bahwa yang bisa dijumlahkan adalah koefisiennya. Ketika menjawab $2x + 3x = 5x$, dia menjumlahkan $2 + 3 = 5$. Begitupula ketika menjumlahkan $2x + 3y$ hasilnya $5xy$. Ini mirip dengan $2 + 3 = 5$.

10	2x + 3x = 5x	X		Karena 2 + 3 itu sama dengan 5 jadi jawabannya betul
11	2x + 3y = 5xy	X		Karena satuannya ada 2 yaitu x sama y jadi jawabannya satuannya xy

Siswa yang lain mengalami kesalahan, karena terpengaruh oleh bentuk perkalian dan bentuk penjumlahan pecahan. Siswa ini menjawab $2x + 3x = 5x^2$, karena $x + x = x^2$ dan $2 + 3 = 5$. Alasan yang "tidak konsisten" karena penjumlahan variabel diidentikkan dengan perkalian, sedangkan penjumlahan koefisien diidentikan dengan penjumlahan biasa.

Pada kasus $2x + 3y = 5xy$, siswa terpengaruh dengan proses menyederhanakan bentuk pecahan aljabar. Dia ingat, untuk kasus pecahan $\frac{2}{x} + \frac{3}{y}$ biasanya disamakan penyebut menjadi $\frac{2y}{xy} + \frac{3x}{xy} = \frac{2y+3x}{xy}$. Dalam kasus ini siswa pada posisi ingatan samar-samar.

10	2x + 3x = 5x	X		karena 2x + 3x = 5x sudah diketahui variabelnya sama yaitu x, maka tinggal dijumlah saja.
11	2x + 3y = 5xy		X	karena 2x + 3y variabelnya tidak sama jadi hanya dijumlah menjadi 2x + 3y = 5x + y

Kesalahan lain terjadi pada siswa yang memberi alasan $2x + 3y = 5x + y$. Dia berpikir bahwa bilangan bisa dijumlahkan dengan bilangan 2 + 3 = 5. Variabelnya berbeda tidak bisa dijumlahkan, sehingga bentuknya tetap $x + y$. Setelah digunakan untuk menyelesaikan masalah diputuskan untuk menjawab $5x + y$.

2. Kesalahan Siswa dalam Mengonstruksi Konsep Pangkat dan Akar Kuadrat

Untuk mengungkap kesalahan siswa dalam mengonstruksi penjumlahan bentuk kuadrat dan akar kuadrat dilakukan dengan memberikan 2 (dua) pernyataan SALAH kepada siswa: $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ dan $\sqrt{x + y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$. Siswa diminta untuk menyatakan persetujuan (setuju atau tidak setuju) dan memberi alasannya. Data rangkuman alasan siswa terhadap soal $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ dan $\sqrt{x + y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ disajikan pada Tabel 9 dan Tabel 10 berikut.

Tabel 9. Data Rangkuman Alasan Siswa terhadap Soal $(x + y)^2 = x^2 + y^2$

Alasan	Benar			Salah	Konsisten	
	True	Pseudo	Klarifikasi		Ya	Tdk
Karena $(x + y)^2 = x^2 + y^2$; sama seperti $(xy)^2 = x^2y^2$ dan karena rumusnya memang begitu	0	21	5	64	78	12
Misalkan x= 2 dan y=3, shg $(2+3)^2 \neq 2^2 \times 3^2$	24	15	11	15	54	11
$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$	89	6	0	0	86	9
$(x+y)^2 = x^2 + xy + y^2$	0	30	12	52	82	12
$(x+y)^2 = 2x^2 + 2y^2$	0	0	0	8	8	0

Tidak memberi alasan	6	0	21	12	34	5
Jumlah	119	72	49	151	342	49

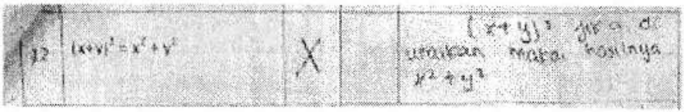
Dari Tabel 9 terlihat bahwa jumlah siswa yang mengalami kesalahan mengkuadratkan masih sangat banyak, yakni 151 orang (38,61%) dari 391 siswa. Ini menunjukkan bahwa banyak siswa yang salah dalam mengonstruksi konsep. Kesalahan terutama banyak terjadi pada kasus membenarkan pernyataan $(x + y)^2 = x^2 + y^2$. Alasan yang terbanyak adalah sama saja proses dikurung dikuadratkan dengan dikuadratkan masing masing lalu dijumlahkan.

Tabel 10. Data Rangkuman Alasan Siswa terhadap Soal $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

Alasan	Benar			Salah	Konsisten	
	True	Pseudo	Klarifikasi		Ya	Tdk
Berlaku sama seperti $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$	0	8	12	17	35	2
Dengan mengganti x=4 dan y=9, maka persamaan tidak berlaku ($\sqrt{4+9} \neq \sqrt{4} + \sqrt{9}$)	83	6	12	0	86	15
Karena $\sqrt{x+y}$ dipecah menjadi $\sqrt{x} + \sqrt{y}$	0	12	32	90	127	7
Karena $\sqrt{x+y}$ *dan* $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ memiliki hasil yang sama	0	21	23	45	81	8
$\sqrt{x+y}$ untuk mempersingkat penulisan	6	0	14	10	27	3
Jumlah	89	47	93	162	356	35

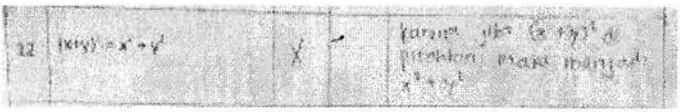
Berdasarkan Tabel 10, terlihat bahwa jumlah siswa yang mengalami kesalahan dalam mengonstruksi akar pangkat dua masih sangat banyak, yakni 162 orang (41,43%) dari 391 siswa. Kesalahan paling banyak terjadi pada masalah $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ dengan alasan sama saja bentuk $\sqrt{x+y}$ dan $\sqrt{x} + \sqrt{y}$, karena kalau dipecah hasilnya sama.

Beberapa alasan siswa dalam menjustifikasi pernyataan disajikan seperti berikut.



Alasan: bentuk $(x + y)^2$ jika diuraikan akan menjadi $x^2 + y^2$
Dari alasan tersebut terlihat bahwa siswa belum memahami makna dari $(x+y)^2$. Bahasa komunikasi yang digunakan adalah "jika diuraikan". Hal ini dipengaruhi oleh kegiatan ketika menyederhanakan bentuk aljabar". Bahasa komunikasi "diuraikan" tersebut juga dilakukan ketika menjawab $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

Alasan: jika $\sqrt{x+y}$ diuraikan, maka hasilnya $\sqrt{x} + \sqrt{y}$
Siswa lain memberikan alasan dengan bahasa komunikasi "dipisahkan". Bahwa $(x + y)^2$ jika dipisahkan menjadi $x^2 + y^2$.



Alasan: jika $(x + y)^2$ dipisahkan, maka menjadi $x^2 + y^2$

Alasan siswa lain $(x + y)^2$ sama saja dengan $(x.x) + (y.y) = x^2 + y^2$. Seakan-akan alasan siswa tersebut menggunakan konsep matematika bahwa $x^2 = x.x$ dan $y^2 = y.y$, namun alasan tersebut tidak sesuai dengan pernyataan yang seharusnya dibuat.

Alasan: $(x + y)^2$ sama saja dengan $(x.x) + (y.y) = x^2 + y^2$.

C. Karakteristik Kesalahan Siswa dalam Mengonstruksi Konsep Geometri

Kesalahan berpikir siswa dalam mengonstruksi konsep geometri dibagi dalam 4 bentuk: kesalahan dalam mengonstruksi konsep segitiga, konsep luas daerah dan konsep phytagoras.

1. Kesalahan Siswa dalam Mengonstruksi Konsep Segitiga

Kesalahan siswa dalam mengonstruksi konsep segitiga tercermin dari alasan yang ditulis, ketika diminta untuk menjustifikasi pernyataan "suatu segitiga dapat dibuat dengan ukuran sisi-sisinya 6 cm, 7 cm, dan 14 cm. Adapun data rangkuman alasan siswa dalam menjustifikasi suatu segitiga disajikan pada Tabel 11 berikut.

Tabel 11. Data Rangkuman Alasan Siswa dalam Menjustifikasi suatu Segitiga

Pernyataan	Alasan	Benar			Salah	Konsisten	
		True	Pseudo	Klarifikasi		Ya	Tdk
Ada segitiga dengan ukuran sisi-sisinya	Karena ada 3 (tiga) sisi berarti bisa dibuat segitiga	0	64	3	43	102	8

6 cm, 7 cm, dan 14 cm	Karena tidak sesuai dengan teorema pythagoras ($6^2+7^2 \neq 14^2$)	0	51	4	47	85	17
	Karena sisi-sisi yang berhadapan sama besar, sebab pada ciri-ciri segitiga, sisi-sisi yang berhadapan sama besar	0	6	5	12	23	0
	Karena 6 cm, 7 cm, dan 14 cm adalah sisi dari segitiga siku-siku	0	23	7	11	37	4
	Karena bukan termasuk segitiga siku-siku	0	10	4	14	25	3
	Karena 6, 7, dan 14 bukan merupakan sifat segitiga	54	6	12	8	9	5
	Tidak memberikan alasan	0	2	0	6	14	1
Jumlah		54	162	35	141	295	38

Segitiga dengan panjang sisi-sisinya 6 cm, 7 cm, dan 14 cm tidak mungkin ada, karena jumlah panjang dua sisinya, yaitu 6 cm + 7 cm = 13 cm "KURANG DARI" 14 cm, sehingga tidak mungkin terbentuk segitiga. Syarat terbentuknya suatu segitiga adalah setiap jumlah dua sisinya selalu lebih besar dari sisi yang lain.

Sebagian besar siswa menjawab salah dan pseudo. Siswa yang menjawab salah beralasan bahwa kalau ada tiga sisi pasti bisa dibuat segitiga. Hal ini didasari oleh pemikiran bahwa segitiga sebarang dapat terbentuk dengan sisi-sisi berbeda.

3	Ada segitiga dengan ukuran sisi-sisinya 6 cm, 7 cm, dan 14 cm	X		Karena segitiga sembarang mempunyai ukuran sisi yang berbeda

Sebagian besar siswa menjawab "bukan segitiga" karena tidak memenuhi triple phytagoras. Proses berpikir siswa ini adalah pseudo, jawaban siswa benar, namun alasan yang dikemukakan salah.

3	Ada segitiga dengan ukuran sisi-sisinya 6 cm, 7 cm, dan 14 cm		X	Karena bukan termasuk triple pitagoras

Alasan: karena bukan termasuk tripel phytagoras

3	Ada segitiga dengan ukuran sisi-sisinya 6 cm, 7 cm, dan 14 cm		X	[illegible]

Alasan: karena jika segitiga itu menunjukkan segitiga siku-siku maka angka yang digunakan seharusnya 6,8,10.

Jawaban siswa tersebut menunjukkan bahwa siswa mempersempit pengenalan terhadap segitiga, bahwa segitiga yang diketahui sisi-sisinya seharusnya siku-siku. Dia hanya berpikir bahwa soal yang biasa diberikan oleh guru dengan diketahui sisi-sisinya selalu terkait dengan phytagoras. Hal ini menunjukkan bahwa berpikir siswa hanya sampai pada tahap prosedural. Siswa tersebut hanya hafal dengan prosedur yang pernah diberikan oleh guru dan biasanya digunakan untuk memecahkan masalah segitiga siku-siku. Sehingga siswa secara langsung menerapkan teori phytagoras, untuk masalah yang seharusnya tidak perlu menggunakannya.

2. Kesalahan Siswa dalam Mengonstruksi Konsep Luas Daerah

Kesalahan siswa dalam mengontruksi konsep luas ditelusuri melalui pernyataan berikut: "suatu persegi panjang dengan ukuran 6 $m \times 5\ m$. Luas daerah persegi panjang tersebut adalah 30 m^2. Satuan m^2 diperoleh dari $m \times m$". Sebenarnya konsep satuan luas daerah menggunakan satuan persegi, karena untuk menutup suatu daerah menggunakan bangun persegi satuan. Luas daerah merupakan banyaknya persegi satuan yang dapat menutup daerah tersebut. Kenyataannya banyak siswa yang menjawab satuan luas dinyatakan sebagai persegi karena satuan dikali satuan menghasilkan satuan persegi.

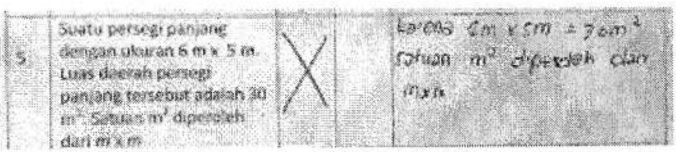
Tabel 12 Data Rangkuman Alasan Siswa dalam Menjustifikasi suatu Segitiga

Pernyataan	Alasan	Benar			Salah	Konsisten	
		True	Pseudo	Klarifikasi		Ya	Tdk
Suatu persegi panjang dengan ukuran 6 m x 5 m. Luas daerah persegi panjang tersebut adalah 30 m^2. Satuan m^2 diperoleh dari m x m	L = p x l = 6 m x 5 m = 6 x 5 mxm = 30 m^2	0	198	4	0	85	117
	Karena satuan luas adalah m^2	31	23	5	12	23	48
	Karena jika satuan dikalikan maka hasilnya satuan kuadrat	0	42	5	9	37	19

Satuan m^2 diperoleh dari kuadrat bilangan	0	0	0	4	4	0
Karena m x m = m^2 dan m^2 merupakan satuan luas	12	23	9	9	12	5
Karena ada dua m, maka menjadi m^2	0	0	0	5	14	1
Jumlah	43	286	23	39	175	190

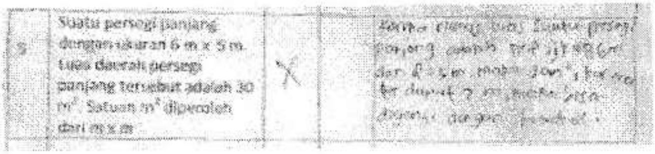
Sebagian besar siswa, yaitu 286 (73,1%) orang dari 391 siswa menjawab konsep satuan luas (m^2) sebagai hasil kali mxm. Adapun jawaban siswa terkait dengan konsep satuan luas disajikan sebagai berikut.

Alasan: karena m^2 diperoleh dari hasil perkalian meter x meter = meter^2 = m^2



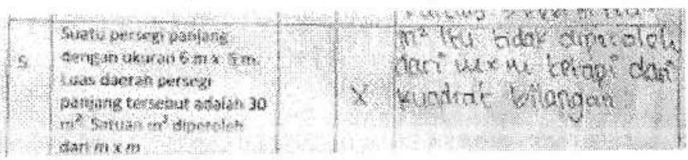
Alasan: karena 6 m x 5 m = 30 m^2 diperoleh dari m x m

Sebagian siswa lain menjawab m^2 dikarenakan terdapat dua m. Karena rumus luas persegi panjang adalah p x l. Jika panjang 6 m dan lebar 5 m, maka 30 m^2, terjadi karena ada dua m. Pada dasarnya jawaban siswa tersebut sama dengan jawaban siswa lain yang menyatakan bahwa m x m = m², hanya diungkapkan dengan bahasa yang berbeda, yakni terdapat dua m.



5	Suatu persegi panjang dengan ukuran 6 m x 5 m. Luas daerah persegi panjang tersebut adalah 30 m^2. Satuan m^2 diperoleh dari m x m	X		[illegible]

Ada sedikit siswa yang menjawab bahwa m^2 tidak diperoleh dari mxm tetapi dari kuadrat bilangan. Siswa ini menyadari bahwa yang bisa dikalikan adalah bilangan, karena itu dinyatakan kuadrat bilangan. Namun demikian tidak jelas hubungan antara kuadrat bilangan dengan m².



5	Suatu persegi panjang dengan ukuran 6 m x 5 m. Luas daerah persegi panjang tersebut adalah 30 m^2. Satuan m^2 diperoleh dari m x m		X	m^2 itu tidak diperoleh dari m x m tetapi dari kuadrat bilangan

Banyaknya siswa yang menjawab m^2 diperoleh dari mxm, dikarenakan oleh proses pembelajaran yang menekankan pada prosedur, bahwa dalam menghitung luas daerah dilakukan dengan menghafal rumus dan dilanjutkan memasukkan ukuran-ukuran ke dalam rumus serta menghitungnya. Siswa tidak mengetahui sebenarnya apa itu luas daerah. Yang penting bagi siswa adalah memperoleh jawaban yang benar, meskipun dia tidak paham.

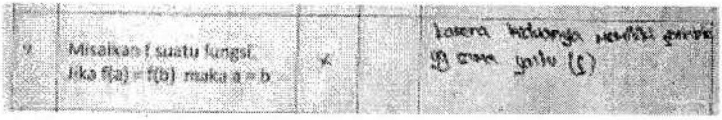
D. Karakteristik Kesalahan Siswa dalam Mengonstruksi Konsep Fungsi

Kesalahan berpikir siswa dalam mengonstruksi konsep fungsi diungkap melalui masalah berikut "Misalkan f suatu fungsi. Jika f(a) = f(b) maka a = b". Adapun hasil rangkuman alasan siswa dalam memahami konsep fungsi disajikan pada Tabel 13.

Tabel 13 Data Rangkuman Alasan Siswa dalam Memahami Konsep Fungsi

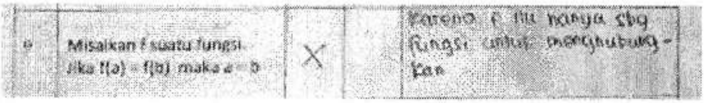
Pernyataan	Alasan	Benar			Salah	Konsisten	
		True	Pseudo	Klarifikasi		Ya	Tdk
Misalkan f suatu fungsi. Jika f(a) = f(b) maka a = b	Dengan mencoret f, maka diperoleh a = b	0	74	4	112	184	6
	Fungsi a = fungsi b, jadi a=b	0	14	5	74	83	10
	Karena f memiliki fungsi yang sama	0	43	7	10	47	13
	Karena f hanya sebagai penghubung	0	0	0	15	4	11
	Karena f(a)f(b) maka a.b	0	6	5	15	12	5
	Tidak ada alasan	0	0	0	7	14	1
Jumlah		0	137	21	233	274	116

Siswa banyak mengalami kesalahan, karena menganggap fungsi seperti variabel biasa yang bisa saling dibagi sehingga hasilnya $a = b$. Karena memiliki variabel yang sama yaitu f, maka $a = b$.



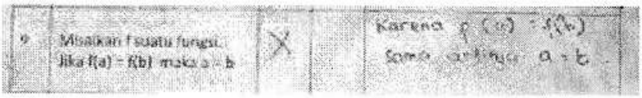
9	Misalkan f suatu fungsi. Jika f(a) = f(b) maka a = b	×		karena keduanya memiliki [illegible] yg sama yaitu (f)

Siswa yang lain menganggap bahwa f itu hanya sebagai fungsi untuk menghubungkan sehingga sama dan dapat dihilangkan.



9	Misalkan f suatu fungsi. Jika f(a) = f(b) maka a = b	×		Karena f itu hanya sbg fungsi untuk menghubung-kan

Dengan bahasa yang berbeda tetapi kesimpulannya sama. Bahwa karena $f(a) = f(b)$ sama artinya dengan $a = b$.



9	Misalkan f suatu fungsi. Jika f(a) = f(b) maka a = b	×		Karena f(a) = f(b) sama artinya a = b.

Ketiga kelompok siswa tersebut menunjukkan kesalahan dalam memahami konsep fungsi. Bahwa suatu fungsi mungkin saja memiliki hasil sama tetapi asalnya berbeda. Sebagai contoh $f(x) = x^2$. Untuk $f(2) = f(-2)$, 2 tidak sama dengan -2. Hal ini menunjukkan bahwa sebagian besar siswa tidak memahami hakekat fungsi. Siswa hanya hafal prosedur bahwa fungsi mirip dengan operasi aljabar.

BAB V
TEORI KESALAHAN
KONSTRUKSI KONSEP MATEMATIKA

A. *Pseudo Construction*

Hasil konstruksi matematika siswa seringkali berbeda dengan apa yang dituliskan oleh siswa. Jika dilihat dari hasil kerja siswa ada dua kemungkinan. *Pertama,* seolah-olah jawaban siswa benar, namun setelah ditelusuri lebih mendalam, ternyata apa yang dipikir oleh siswa tidak sesuai dengan substantif konsepnya. Konstruksi seolah-olah benar tetapi ternyata salah selanjutnya disebut *konstruksi pseudo "benar"*. *Kedua,* seolah-olah jawaban siswa salah, namun setelah ditelusuri (atau refleksi) berpikir siswa benar, siswa bisa menuliskan jawaban secara benar.

Pseudo konstruksi yang dipaparkan meliputi pseudo konstruksi "benar" dan pseudo konstruksi "salah". Adanya pseudo konstruksi "benar" diungkap dengan meminta siswa untuk "menilai pernyataan dan memberikan alasan terhadap penilaiannya". Siswa dihadapkan pada pernyataan aljabar $2x + 3x = 5x$ dan siswa menjawab benar pernyataan tersebut. Jawaban siswa tersebut nampak seperti benar, namun ketika ditelusuri lebih lanjut, siswa salah dalam menjustifikasi jawabannya, sehingga konstruksi siswa tersebut dapat dikatakan pseudo (siswa mengalami *pseudo contruction*). Alasan siswa menjawab benar pernyataan "$2x + 3x = 5x$" karena x diilustrasikan sebagai benda. Sebagai contoh subjek S2, S3, dan S4 mengilustrasikan variabel x dengan benda "buku" dan "apel" seperti berikut.

S2: benar. karena sama-sama x jadi x bisa dijumlahkan. Kalau sama-sama buku dan buku jadi 2 buku ditambah 3 buku sama dengan 5 buku
S3: benar. Karena kedua variabelnya sama. Jadi bisa dijumlahkan. Kalau misalkan x itu buku berarti 2 buku ditambah 3 buku jadi ada 5 buku
S4: benar, ya kita misalkan saja x itu benda, misalnya benda itu apel maka 2 apel ditambah 3 apel samadengan 5 apel

Peneliti menelusuri lebih lanjut dengan melakukan *indept interview* kepada subjek. Dengan mengajukan pertanyaan kepada ketiga subjek tersebut, mereka tetap yakin bahwa pemisalan mereka adalah benar. Berikut dialog antara peneliti dan subjek.

P: apakah Anda yakin bahwa x bisa digantikan oleh buku atau apel?
S2, S3, S4: ya Pak (menjawab serentak)
P: kenapa?
S2: ya jelas kan Pak bahwa dua buku ditambah dengan tiga buku hasilnya ya lima buku
S3: Ya Pak saya setuju dengan S2 memang biasanya kita memperoleh pelajaran seperti itu, dua buku ditambah tiga buku sama dengan lima buku.
S4: pada dasarnya sama juga sama, hanya pemisalan saya x sebagai apel, sehingga dua apel ditambah dengan tiga apel sama dengan lima apel.

Dari dialog tersebut terlihat bawa subjek sangat yakin dengan jawabannya bahwa jawabannya benar. Peneliti melanjutkan dialog dengan subjek dengan memberikan pancingan pertanyaan yang mengarah pada *conflict cognitive*.

P: pernahkan Anda mengetahui ada bentuk x^2 *atau* $\sqrt{x}$*?*
S2, S3, S4: Ya pak sering (subjek menjawab serentak)
P: di mana Anda temukan?
S2, S3, S4: di matematika materi aljabar.
P: Kamu juga pernah menemukan masalah $x^2 + x^2$*?*

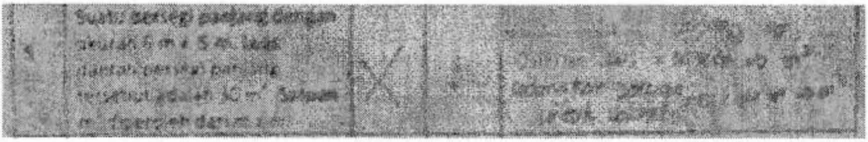
S2, S3, S4: pernah
P: kalau kamu tadi memisalkan x sebagai buku atau apel, bagaimana dengan x^2, apa makna x^2?
S2, S3, S4 (diam lama): tapi biasanya diilustrasikan seperti itu oleh guru saya
P: kalau x sebagai buku, menjadi apa x^2? Apakah buku kuadrat?
S2, S3, S4: ehm... iya salah

Berdasarkan dialog tersebut terlihat bahwa siswa awalnya sangat yakin bahwa jawabannya benar (msekipun sebenarnya salah) dan dengan diberikan *conflict cognitive* siswa mengalami disequlibrasi yang ditandai dengan diam lama dan bingung. Setelah siswa mengalami *conflict cognitive,* mulailah dia memikirkan ulang apa yang telah dipelajari dan akhirnya menyadari bahwa apa yang dikonstruksi selama ini salah. Hal ini menunjukkan bahwa berpikir siswa dalam menilai pernyataan $2x + 3x = 5x$ adalah pseudo (semu).

Pseudo konstruksi "benar" juga terjadi ketika siswa dihadapkan pada masalah "menilai pernyataan" berikut:

Suatu persegi panjang dengan ukuran 6 m x 5 m. Luas daerah persegi panjang tersebut adalah 30 m^2. Satuan m^2 diperoleh dari m x m

Hampir semua siswa memahami bahwa luas daerah persegi panjang dengan ukuran 6 m x 5 m adalah 30 m^2. Hal ini terjadi karena siswa memahami bahwa persegi panjang tersebut memiliki ukuran panjang 6 m dan lebar 5 m, padahal luas daerah persegi panjang rumusnya $L = p \times l$. Siswa langsung bisa menentukan luasnya = 6 m x 5 m dan diperoleh 30 m^2. Meskipun siswa bisa menentukan luas daerah tersebut, namun siswa memahami m^2 (meter persegi) sebagai perkalian *m* (meter) dengan *m* (meter) - (BUKAN sebagai persegi satuan). Hal ini menunjukkan proses berpikir siswa masih semu (pseudo). Adapun salah satu contoh hasil kerja siswa adalah sebagai berikut.



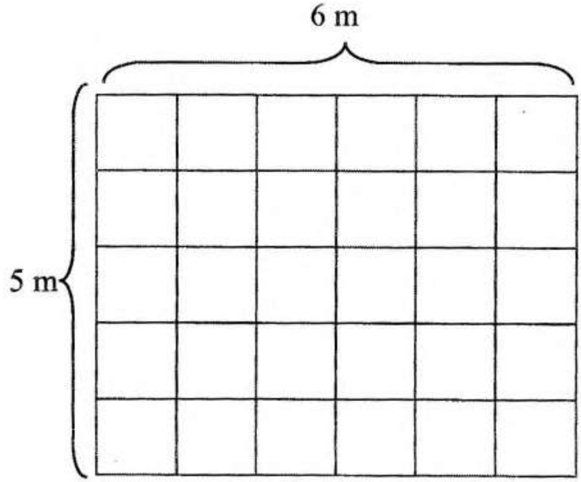
Ketika peneliti menelusuri lebih lanjut, ternyata siswa berpikir bahwa perkalian $m \times m$ identik dengan perkalian dalam bentuk aljabar $a \times a = a^2$. Siswa tidak berpikir konsep luas tetapi berpikir konsep aljabar. Seperti pernyataan siswa berikut.

S1J: *benar. Karena rumusnya luas persegipanjang kan panjang kali lebar. Ya tinggal dikalikan meter kali meter kan meternya ada dua ya meter kuadrat. Ya seperti itu. Ini kan sama dengan di aljabar. Kalau a dikalikan a kan a kuadrat jadi m dikalikan m ya m kuadrat*

Siswa memahami bahwa luas daerah diperoleh dari perkalian dua bilangan yang ada dalam soal dan satuan luas diperoleh dari perkalian antar satuannya. Pemahaman tersebut adalah salah. Seperti yang dikemukakan oleh siswa berikut.

S3M: *benar, karena luas persegipanjang itu panjang dikali lebar, $6m \times 5\ m = 30\ m^2$, $6 \times 5 = 30$ dan $m \times m = m^2$*

Konsep luas daerah sesungguhnya adalah mencari banyaknya persegi satuan yang dapat menutup suatu daerah. Suatu persegi panjang dengan panjang 6 m dan lebar 5 m dapat digambar seperti berikut.



Menentukan luas daerah persegi panjang berukuran 6 m x 5 m artinya mencari banyaknya persegi satuan yang dapat menutup daerah persegi panjang dengan ukuran 6 m x 5 m. Dengan membagi panjang 6 m menjadi enam bagian dengan panjang masing-masing 1 m dan membagi lebar 5 m menjadi lima bagian dengan panjang masing-masing 1 m, dapat diperoleh persegi-persegi dengan ukuran 1 m x 1 m (yang disebut sebagai persegi satuan 1 m^2) sebanyak 30 persegi satuan atau 30 satuan persegi yang disebut 30 m^2. Jadi m^2 bukan representasi dari m x m tetapi representasi dari persegi satuan dengan ukuran 1 m.

Dari jawaban siswa terlihat bahwa siswa bisa menghitung luas daerah dan bisa menuliskan satuan luasnya dengan m^2, namun proses mengonstruksinya masih semu (pseudo konstruksi). "Seakan-akan" siswa memahami konsep luas daerah yang ditandai dengan satuan luas ditulis sebagai m^2, namun kenyataannya mereka salah menginterpretasikan satuan meter persegi. Ditinjau dari proses berpikirnya siswa tersebut mengalami berpikir pseudo konstruksi benar.

Di samping pseudo konstruksi benar, juga ada pseudo konstruksi salah. Pseudo konstruksi salah ditandai dengan adanya jawaban siswa salah, tetapi setelah refleksi siswa mampu memperbaikinya. Pseudo konstruksi salah terjadi pada masalah perhitungan waktu (studi kasus di luar penelitian ini). Pseudo konstruksi dapat ditelusuri melalui hasil kerja siswa dan wawancara berbasis tugas.

Pseudo konstruksi "salah" dijaring melalui masalah berikut:

> *Andi bekerja kelompok di rumah Beni selama 2 jam. Andi pulang pukul 17.00. pukul berapa Andi mulai belajar kelompok?*

Siswa menjawab masalah tersebut 3 jam. Dalam hal ini siswa mengalami kesalahan konstruksi. Proses berpikir siswa nampaknya mengalami interferensi berpikir. Dari hasil penelusuran diperoleh bahwa berpikir siswa terjadi sebagai berikut.

> *Pulang pukul 17.00 dan sudah bekerja selama 2 jam berarti mulainya pukul 3 sore dan siswa langsung menuliskan 3 jam. Nampaknya siswa mengalami kerancuan dalam menulis pukul 3 sore dengan 3 jam. Pada dasarnya siswa memahami bahwa belajar kelompok dimulai pukul 3 sore, mestinya ditulis 15.00. Karena di pikiran siswa sudah terbentuk angka 3, langsung dituliskan 3 jam (bukan pukul 3 atau pukul 15.00).*

Setelah mendapatkan jawaban tersebut, peneliti melakukan wawancara berbasis tugas kepada siswa.

P: sudah yakinkah dengan jawaban tersebut?
S: ehm...

P: Bisakah menjelaskan kepada saya apa bedanya bedanya 2 jam dan pukul 14.00

S: 2 jam menunjukkan lama waktu, kalau pukul 14.00 menunjukkan waktu jam 2 siang.

Dengan menjawab pertanyaan peneliti tersebut, siswa langsung sadar bahwa jawaban 3 jam salah.

S: oh ya, "nulis" saya salah. Maksud jawaban saya tadi pukul 15.00, bukan 3 jam.

Dari hasil wawancara tersebut, nampak bahwa siswa menuliskan jawaban salah, tetapi sebenarnya mereka tahu bahwa jawabannya 3 jam yang dimaksud adalah pukul 15.00. Hal ini menunjukkan terjadinya pseudo konstruksi "salah", siswa menjawab salah tetapi sesungguhnya dia bisa menjawab dengan benar (hanya salah dalam menuliskan dengan tidak disadari).

Konstruksi pseudo salah juga terjadi pada saat siswa diberi masalah berikut.

Berapa lama waktu dari pukul 15.45 sampai pukul 17.00?

Siswa menjawab dengan cepat 2 jam 45 menit. Jawaban siswa tersebut salah. Kesalahan siswa terjadi karena dia berpikir bahwa dari pukul 15.00 ke 17.00 ada 2 jam. Karena ada 45 menit dikurangi dengan 00, diperoleh 45 menit, sehingga disimpulkan 2 jam 45 menit. Siswa hanya berpikir cepat tanpa ada kontrol sehingga menghasilkan jawaban salah. Peneliti menelusuri lebih lanjut jawaban siswa dengan wawancara berbasis tugas.

P: Bagaimana kamu bisa mendapatkan jawaban 2 jam 45 menit.

S: dari pukul 15.00 ke pukul 17.00 ada 2 jam dan waktu awalnya 15.45, berarti masih ada sisa 45 menit. Sehingga saya menjawab 2 jam 45 menit

P: kalau dari pukul 15.45 ke pukul 16.45 berapa lama?

S: 1 jam. Ehm... jawaban saya tadi salah

P: kenapa?

S: karena dari pukul 15.45 ke pukul 16.45 lamanya 1 jam. Dari pukul 16.45 ke pukul 17.00 lamanya 15 menit. Jadi seharusnya jawabnya 1 jam 15 menit.

Dari proses penelusuran tersebut terlihat bahwa siswa mengalami konstruksi pseudo "salah". Pada dasarnya siswa bisa menjawab dengan benar, namun karena berpikir siswa didominasi dengan berpikir cepat tanpa ada proses refleksi sehingga menghasilkan jawaban salah. Setelah refleksi siswa bisa memperbaiki menjadi jawaban benar.

B. Lubang Konstruksi

Dalam mengontruksi konsep matematika masih banyak siswa yang mengalami kesalahan dalam mengonstruksi konsep matematika. Struktur berpikir siswa yang terbentuk dalam proses konstruksi tidak utuh. Dalam hal ini ada "lubang" dalam struktur berpikir sebagai hasil konstruksi konsep yang selanjutnya disebut *lubang konstruksi*. Adanya lubang konstruksi dapat ditelusuri melalui hasil kerja siswa dan waawancara berbasis tugas kepada siswa.

Lubang konstruksi terjadi pada masalah yang berkaitan penjumlahan bentuk aljabar. Masalah aljabar dapat dianalisis dari dua sisi: proses konstruksi pseudo dan lubang konstruksi. Dalam kasus lubang konstruksi, siswa mengonstruksi bentuk $2x + 3x = 5x$ sebagai penjumlahan 2 buku dan

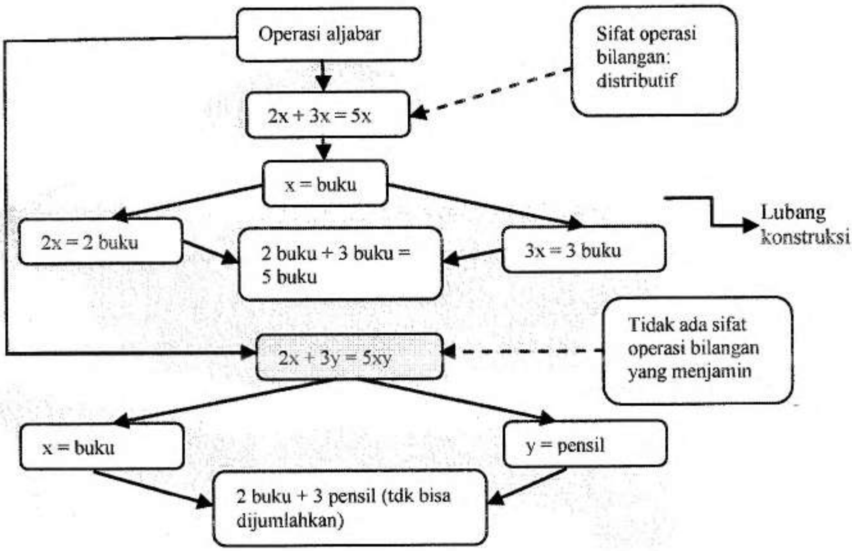
3 buku hasilnya 5 buku. Siswa memandang variabel x bukan sebagai bilangan tetapi sebagai benda. Konstruksi variabel sebagai benda merupakan salah satu bentuk kesalahan, karena sesungguhnya varibel x (dalam konteks bentuk aljabar di SMP), bukan menyatakan benda tetapi menyatakan bilangan, sehingga representasi $2x + 3x$ bisa dioperasikan karena x menyatakan bilangan. Dengan x bilangan, maka ada sifat operasi bilangan yang menjamin, yaitu sifat distributif, bahwa $2x + 3x = (2+3)\ x = 5x$. Jika x mewakili benda, maka tidak ada sifat yang bisa menjamin operasi bisa dilakukan. Karena itu konteks variabel dalam operasi bilangan tersebut adalah bilangan. Variabel x akan menjadi benar jika isinya bukan buku atau apel tetapi harga buku atau harga apel, karena harga merupakan bilangan. Dalam hal ini siswa bisa menjawab benar operasi aljabar, namun proses konstruksinya ada yang tidak sesuai (mengalami kesalahan). Dalam hal ini konstruksi konsep operasi aljabar tidak utuh atau disebut lubang konstruksi.

Siswa juga mengalami lubang kontruksi ketika dihadapkan pada pernyataan $2x + 3y = 5xy$. Mereka menyatakan bahwa pernyataan $2x + 3y = 5xy$ adalah salah. Namun ketika ditelusuri lebih lanjut alasan siswa tidak tepat. Berikut alasan siswa terhadap pernyataan tersebut.

S2: *salah karena 2x dan 3y memiliki variabel yang berbeda. Misalkan kita memiliki 2 piring ditambah 3 sendok memang benar jumlahnya 5 benda tetapi piring dan sendok tidak bisa dijumlahkan jadi satu*

S3: *Ndak yakin sih jawabannya benar, karena menurut saya itu kan varibelnya x sama y jadi hasilnya tetap xy dan 2 ditambah 3 sama dengan 5, sehingga jadinya 5xy*

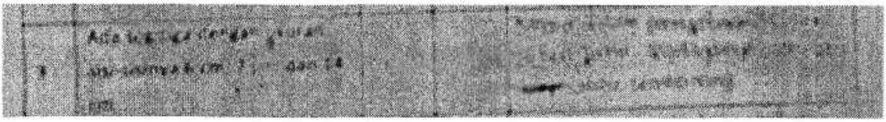
Berdasarkan alasan siswa tersebut, nampak bahwa siswa mengonstruksi variabel x dan y bukan merupakan bilangan, tetapi lebih pada benda. Sehingga alasan tidak bisa dijumlahannya 2x dan 3y bukan karena sifat operasi bilangan dalam matematika , tetapi karena bendanya berbeda. Dengan demikian terjadi lubang konstruksi pada siswa dalam membangun pengetahuan tentang operasi aljabar. Proses terjadinya konstruksi semu siswa dalam materi operasi aljabar dapat digambarkan sebagai berikut.



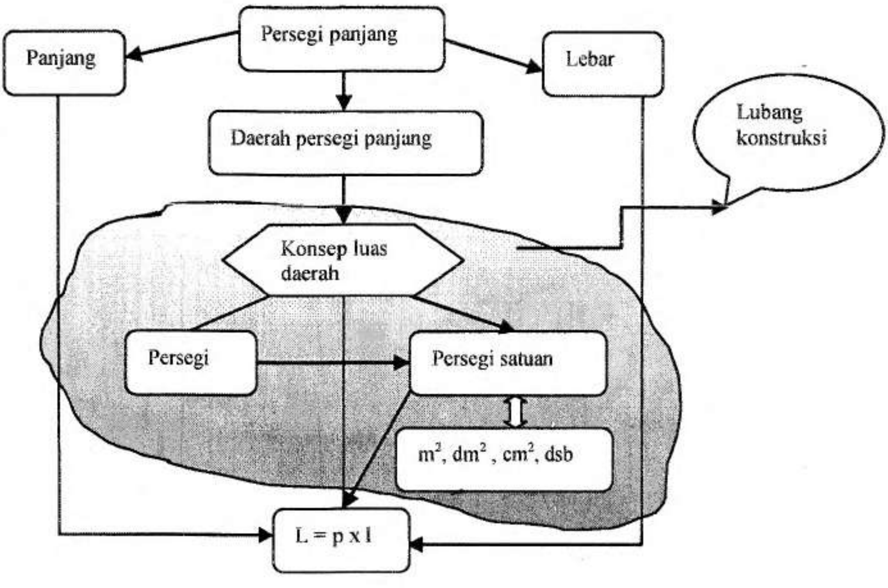
Sifat-sifat operasi bentuk aljabar diturunkan dari sifat-sifat operasi bilangan, sehingga penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian, dan akar/pangkat yang ada di bentuk aljabar semua diturunkan dari operasi bilangan. Sehingga bentuk 2x + 3y sebenarnya representasi dari suatu bilangan untuk suatu nilai x dan y. Representasi 2x + 3y sebagai suatu bilangan belum dimiliki oleh siswa, mereka mengonstruksi bentuk 2x + 3y lebih pada sekumpulan benda. Sehingga terjadi proses kesalahan ketika 2 buku dan 3 pensil ditambah mestinya identik dengan mengumpulkan dua buku dan tiga pensil. Kalau ini yang terjadi mestinya bisa didapatkan ada lima benda berupa pensil dan buku. Ini kesalahan fatal yang mungkin bisa terjadi pada kasus ini. Karena itu representasi $2x + 3y$ sebagai bilangan merupakan hal yang sangat esensial dalam belajar aljabar.

Lubang konstruksi juga terjadi pada masalah luas daerah. Pada dasarnya konstruksi siswa pada masalah luas daerah dapat dikaji berdasarkan dua sudut pandang, yakni pseudo konstruksi dan lubang konstruksi. Dari sudut pandang pseudo konstruksi nampak proses konstruksi "seolah-olah siswa memahami masalah luas daerah", namun faktanya mereka tidak bisa menjustifikasi konsep luas daerah. Hal ini menunjukkan adanya konstruksi semu. Sedangkan dari sudut pandang lubang konstruksi, proses siswa memahami konsep luas daerah masih belum utuh. Hal ini nampak dari pemahaman siswa yang hanya mengonstruksi satuan luas (meter persegi) sebagai perkalian dua variabel (m x m).

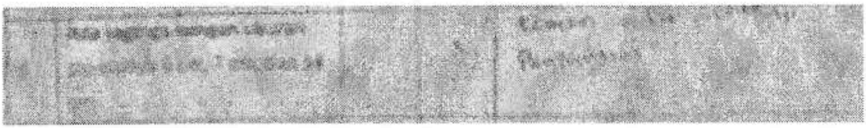
Konsep luas daerah belum terkonstruksi, yang terkonstruksi hanya prosedur mencari luas daerah persegi panjang dengan mengalikan antara panjang dan lebar. Kenapa luas daerah persegi panjang dihitung dengan mengalikan antara panjang dan lebar juga belum terkonstruksi. Hal yang dikonstruksi hanya terbatas pada prosedur menentukan luas daerah, kalau ada persegi panjang pasti ada komponen panjang dan komponen lebar, karena itu fokus pencariannya adalah berapa panjangnya dan berapa lebarnya. Selanjutnya dengan bermodalkan diketahui panjang dan lebarnya, luas segera dapat dicari dengan mengalikan keduanya. Komponen satuan dikonstruksi dengan mengalikan kedua satuan yang ada di komponen panjang dan komponen lebar. Konstruksi siswa tersebut "belum" terkait dengan konsep luas daerah. Karena itu meskipun siswa mampu menjawab masalah dengan benar, namun konstruksi yang dibentuk masih "lubang", yang selanjutnya disebut lubang konstruksi. Salah satu hasil kerja siswa disajikan sebagai berikut.



Konsep luas belum terkonstruksi secara utuh, hanya prosedur yang berhasil dikonstruksi. Hal ini ditandai dengan pernyataan siswa tentang satuan m^2. Skema berpikir siswa terkait dengan adanya lubang konstruksi bisa digambarkan seperti berikut.

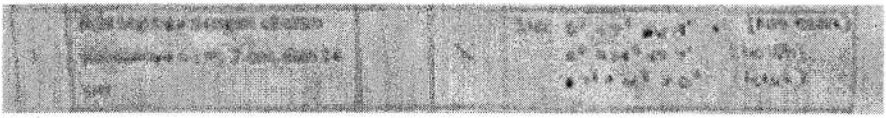


Lubang konstruksi juga terjadi pada masalah yang berkaitan dengan geometri, yaitu: (1) Ada segitiga dengan ukuran sisi-sisinya 6 cm, 7 cm, dan 14 cm dan (2) setiap dua garis yang tegak lurus, PASTI perkalian gradiennya sama dengan -1.

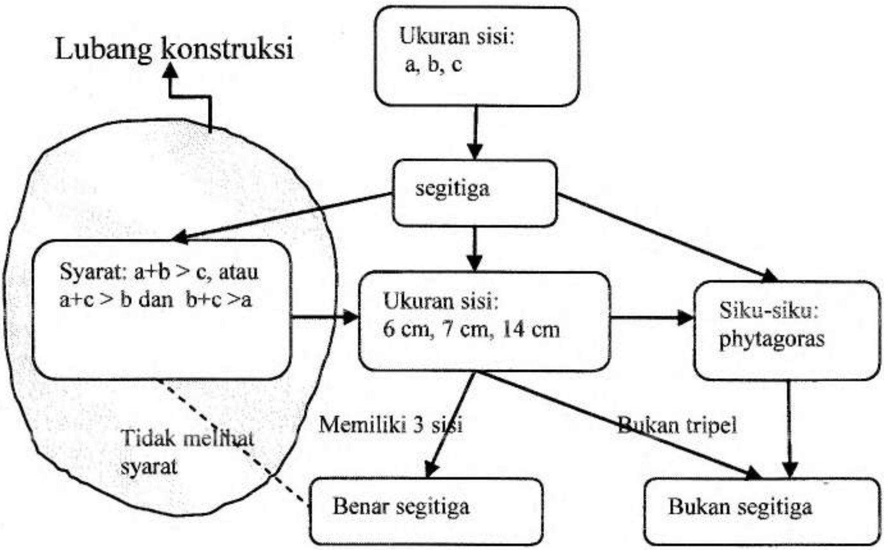


Hampir semua siswa menjawab atau memberikan alasan salah terhadap pernyataan ada segitiga dengan ukuran 6 cm, 7 cm, dan 14 cm. Sebagian siswa menyatakan "benar" bahwa ada segitiga dengan ukuran 6 cm, 7 cm, dan 14 cm. Siswa yang menyatakan benar tersebut tidak menyadari bahwa ada syarat untuk membuat suatu segitiga, yakni jumlah panjang dua sisi sebarang selalu **lebih besar** dari panjang satu sisi yang lain. Dalam kasus tersebut $6 + 7 = 13 < 14$, jadi tidak memenuhi syarat suatu segitiga. Siswa tidak tahu atau tidak memperhatikan syarat dan langsung menyimpulkan bahwa segitiga tersebut bisa dibuat, karena ada tiga sisi. Bagi siswa yang penting ada tiga sisi berarti bisa dibuat segitiga, tanpa memperhatikan panjang dari ketiga sisinya.

Siswa lain menyatakan bahwa pernyataan "ada segitiga dengan ukuran 6 cm, 7 cm, dan 14 cm". Namun setelah ditelusuri lebih lanjut, alasan siswa salah, karena hanya dikaitkan dengan sifat segitiga siku-siku (khususnya teorema phytagoras). Siswa menjawab ketiadaan segitiga tersebut bukan karena tidak bisa dibuat tetapi karena tidak memenuhi triple phytagoras. Siswa berpikir bahwa untuk mengecek segitiga hanya bisa dilakukan dengan menggunakan teorema phytagoras.



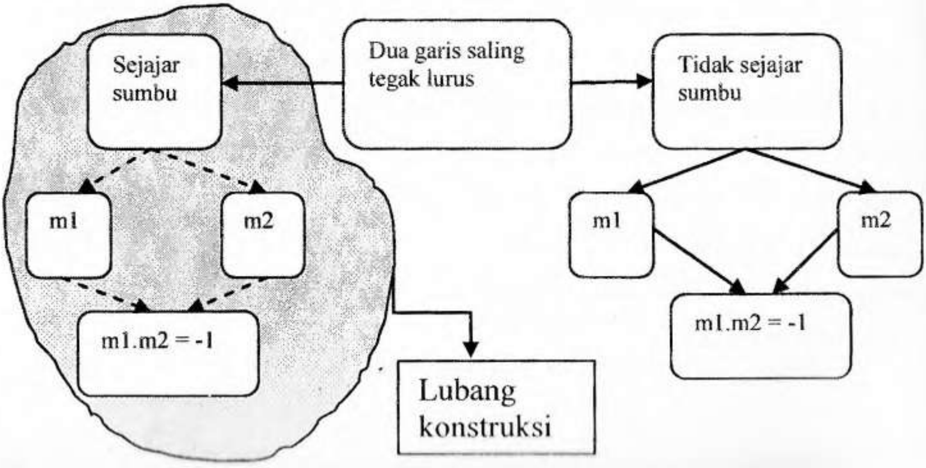
Proses konstruksi siswa dalam konsep segitiga dapat digambarkan sebagai berikut.



Proses berpikir konstruksi siswa dalam memahami segitiga terpengaruh oleh prosedur mengelompokkan segitiga siku-siku dengan segitiga yang bukan siku-siku. Siswa sudah terbiasa memeriksa apakah suatu segitiga merupakan segitiga siku-siku atau bukan siku-siku dengan diketahui ukuran ketiga sisinya. Kebiasaan memeriksa segitiga siku-siku tersebut langsung digunakan untuk memeriksa segitiga yang diberikan.

Pada kasus kedua, siswa membenarkan pernyataan bahwa setiap dua garis yang tegak lurus, PASTI perkalian gradiennya sama dengan -1. Lubang konstruksi terjadi pada proses mengonstruksi perkalian gradien dikaitkan dengan posisi siku-siku kedua garis. Proses konstruksi mestinya dimulai dari konsep garis sejajar dengan sumbu X atau sumbu Y, dilanjutkan dengan garis yang tidak sejajar sumbu. Sifat perkalian gradien dua garis bernilai -1 hanya terjadi pada garis yang tidak sejajar sumbu. Selanjutnya yang menjadi pertanyaan adalah kenapa berlakunya pernyataan tersebut hanya pada garis yang tidak sejajar sumbu. Seandainya tidak dibatasi akan ada kontradiksi. Sebagai contoh dapat diilustrasikan sebagai berikut. Untuk garis sejajar sumbu X bisa ditulis y = a, untuk suatu nilai a bilangan real. Gradiennya adalah m = 0. Untuk garis sejajar sumbu Y, bisa ditulis x = b, untuk suatu nilai b bilangan real. Dalam hal ini gradiennya tidak terdefinisi. Kedua garis tersebut (sejajar sumbu X dan sejajar sumbu Y) saling tegak lurus. Jika berlaku perkalian gradiennya -1, maka nol **dikalikan** tak terdefinisi hasilnya -1 (KONTRADIKSI).

Adapun proses terjadinya lubang konstruksi dapat digambarkan sebagai berikut.



C. *Mis-analogical Contruction*

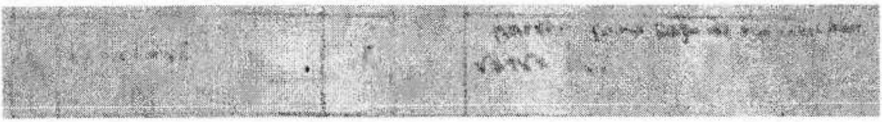
Konstruksi konsep kesalahan analogi (mis-analogical construction) terjadi pada masalah akar pangkat dua dari suatu bilangan. Siswa mengubah akar menjadi pangkat setengah, $\sqrt{(-3)^2} = ((-3)^2)^{\frac{1}{2}}$ dan ketika dioperasikan akar pangkat dua dan pangkat setengah menjadi dikalikan, $((-3)^2)^{\frac{1}{2}} = (-3)^{2.1/2}$ sehingga hasilnya -3 pangkat 1, $(-3)^1$ = -3.

Siswa yang lain mengubah $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{-3.-3} = -3$. Siswa menginterpretasi "mencoret akar pangkat dua dengan pangkat dua", sehingga menghasilkan -3. Ada kesalahan yang terjadi pada siswa dalam mengonstruksi konsep akar dan pangkat. Siswa tidak memperhatikan syarat bahwa akar pangkat dua hanya ada pada bilangan positif dan hasilnya juga bilangan positif. Siswa terpengaruh oleh sifat akar dan pangkat bahwa $((a)^m)^n = a^{mn}$. Analogi dengan pangkat m dipangkatkan lagi dengan n menghasilkan bilangan yang dipangkatkan m.n merupakan pangkal dari terjadinya kesalahan. Siswa lain juga membuat analogi dengan akar bilangan positif, akar dari 9 bisa ditulis sebagai akar dari 3 dikali 3 dan hasilnya 3, ($\sqrt{9} = \sqrt{3.3} = 3$.). Proses tersebut diberlakukan pada bilangan akar dari negatif 3 dikalikan negatif 3 ($\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{-3.-3} = -3$). Siswa tidak memiliki pengetahuan yang bisa digunakan untuk mengontruksi konsep akar dari suatu bilangan positif hasilnya adalah bilangan positif.

S2J: *benar* $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{-3.-3} = -3$. *iya kan tinggal coret pangkat* 2 *dengan akar. dalam akar negative jadi hasilnya juga negatif*

S4B: *benar karena* $\sqrt{n} \times \sqrt{n} = n$, *jadi* $\sqrt{-3} \times \sqrt{-3} = -3$. *akar itu pangkat* $\frac{1}{2}$ *jadi* $\left((-3)^{\frac{1}{2}}\right)^2$, *dua dan setengah dicoret*

Mis-analogical contruction pada masalah akar juga terjadi pada saat siswa menilai pernyataan $\sqrt{3} + \sqrt{3} = \sqrt{6}$ dan pernyataan $\sqrt{x + y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$. Siswa menganggap bahwa dalam akar tidak ada bedanya dengan tidak ada akar. Sehingga berlaku sifat penjumlahan biasa. Sehingga $\sqrt{6}$ bisa ditulis sebagai bentuk $\sqrt{3} + \sqrt{3}$ atau $\sqrt{4} + \sqrt{2}$ atau $\sqrt{1} + \sqrt{5}$.



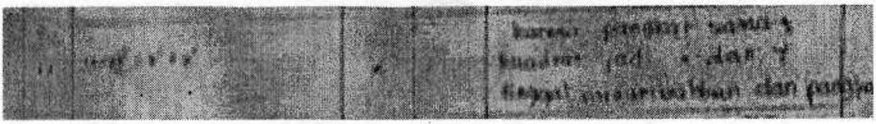
S1J: *benar. kalau seperti ini bisa dijadikan dua. Ini bisa dimisalkan seperti tadi. Misalkan* $\sqrt{6}$ *bisa dijadikan* $\sqrt{3} + \sqrt{3}$ *atau* $\sqrt{4} + \sqrt{2}$ *atau* $\sqrt{1} + \sqrt{5}$. *Kalau ini pekalian bukan penjumlahan, ini beda. Kalau persamaan ini* ($\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$) *benar tapi tidak cocok dengan soal yang ini (siswa menunjuk* $\sqrt{x + y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$)"

Setelah ditelusuri lebih lanjut, siswa menganggap bahwa operasi dalam bilangan akar sama dengan operasi bilangan biasa. Siswa tidak memahami sifat akar, bahwa sifat akar tidak seperti sifat operasi bilangan biasa. Dalam hal ini ada proses analogi dengan operasi bilangan biasa, 6 bisa direpresentasikan sebagai penjumlahan 3 + 3, 4 + 2 atau 5 + 1.

Konstruksi dengan analogi yang salah juga terjadi pada masalah $(x+y)^2$. Siswa menganalogikan bentuk $(x+y)^2$

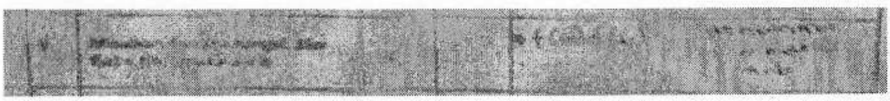
dengan bentuk $(xy)^2$. Karena $(xy)^2 = x^2y^2$, maka $(x+y)^2 = x^2 + y^2$. Siswa memandang kedua bentuk tersebut sebagai bentuk yang analog, sehingga hasilnya sama.

S2: *Itu benar karena sebenarnya jika* $(x + y)^2$ *itu berarti hasilnya akan sama dengan* $x^2 + y^2$



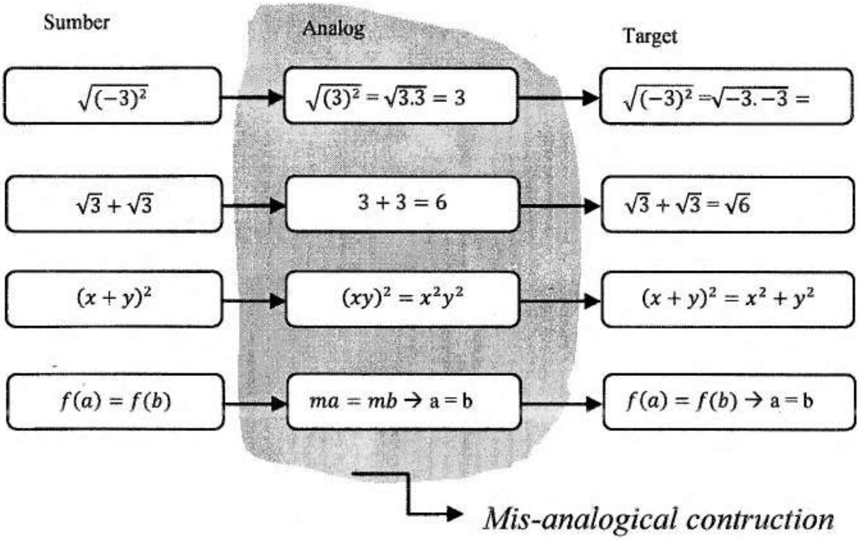
Proses analogi salah pada siswa terjadi karena siswa tidak bisa mengonstruksi sifat yang berbeda antara perkalian dan penjumlahan. Bahwa perkalian dan penjumlahan merupakan dua hal berbeda yang tidak bisa dianalogikan merupakan masalah yang dihadapi oleh siswa.

Proses analogi salah juga terjadi pada kasus fungsi. Siswa masih banyak yang mengonstruksi analogi salah ketika dihadapkan pada pernyataan jika f(a) = f(b) maka a = b. Siswa menganggap f(a) = f(b) analog dengan perkalian m.a = m.b. Pada kasus perkalian ma = mb dapat disederhanakan dengan membagi kedua ruas dengan m (untuk m tak nol), sehingga diperoleh a = b.



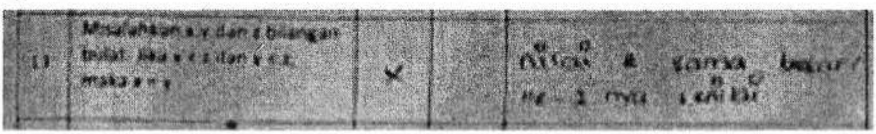
S3: *benar karena fungsi f (a) dan f (b) mempunyai tanda sama. ya boleh dicoret karena f itu fungsi*

Proses terjadinya kesalahan dalam analogi dapat digambarkan seperti berikut.



D. *Mis-logical Construction*

Kesalahan dalam konstruksi berpikir logis (*mis-logical construction*) terdeteksi ketika siswa dihadapkan pada pernyataan "misalkan x, y, dan z bilangan bulat. Jika $x < z$ dan $y < z$, maka $x = y$". Siswa bernalar bahwa karena x dan y sama-sama kurang dari z, maka x = y. Siswa tidak bisa mengonstruksi bahwa banyak alternatif yang terjadi ketika x < z dan y < z. Siswa menangkap pernyataan x < z dan y < z, x dan y merupakan nilai yang tunggal. Karena nilai x & y tunggal dan tidak ada alternatif lain, maka siswa membuat kesimpulan x = y.



S2: benar. Karena sudah pasti sama dengan itu pasti sama. Karena x dan y sama-sama kurang dari z jadi x = y

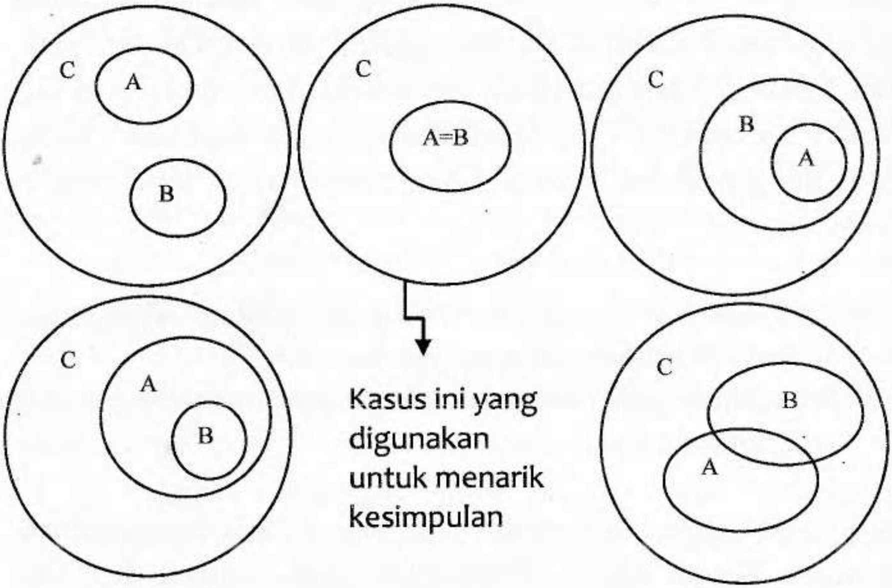
Kesalahan dalam mengonstruksi berpikir logis konsisten dilakukan. Hal ini terlihat ketika siswa diberi pernyataan "Misalkan x,y,dan z bilangan bulat. Jika x < y dan x < z, maka y < z". Siswa konsisten mengalami kesalahan dalam mengonstruksi berpikir logis dengan menyangkal pernyataan tersebut. Menurut siswa seharusnya kesimpulannya bukan y < z tetapi y = z. Setelah ditelusuri, jawaban siswa tersebut dengan alasan karena y dan z sama-sama lebih dari x, maka y = z.

S2: Salah, karena x < y dan x < z, seharusnya jawabannya yang benar adalah y = z karena sama-sama lebih besar dari x
S3: Salah, karena y dan z merupakan bilangan yang sama-sama lebih dari x, seharusnya y = z

Mis-logical construction juga terjadi pada masalah himpunan. Ketika siswa dihadapkan pada pernyataan "Jika $A \subset C$ *dan* $B \subset C$, maka $A = B$". Alasan yang digunakan oleh siswa juga konsisten, karena A dan B sama-sama bagian dari C, maka A = B.

S4: Karena A dan B sama-sama bagian dari C maka A sama dengan B

Kesalahan proses konstruksi logis siswa dikarenakan oleh kekurangpahaman siswa terhadap persyaratan pernyataan. A bagian dari C dan B bagian dari C, seharusnya dikonstruksi dengan banyak kemungkinan yang terjadi tetapi diklaim A dan B hanya tunggal dan sama, sehingga bisa disimpulkan hasilnya sama. Dalam kasus A bagian dari C dan B bagian dari C ada lima kemungkinan yang terjadi: (1) A terpisah B; (2) A sama dengan B; (3) A bagian dari B; (4) B bagian dari A; dan (5) A berbeda dengan B tetapi beririsan. Konstruksi siswa hanya melihat satu kemungkinan, yakni A sama dengan B.



BAB VI
KESALAHAN KONSTRUKSI DALAM PEMECAHAN MASALAH MATEMATIKA

A. Karakteristik Kesalahan Siswa dalam Memecahkan Masalah Matematika

Untuk mengungkap karakteristik kesalahan siswa dalam pemecahan masalah matematika dilakukan dengan memberikan 2 (dua) masalah kepada siswa. Masalah pertama berkaitan dengan garis singgung persekutuan luar dua lingkaran dan luas daerah persegi. Untuk menyelesaikan masalah pertama, siswa harus memahami konsep garis singgung persekutuan luar dimana ada hubungan antara jari-jari, panjang garis singgung persekutuan, titik singgung, dan jarak dua pusat lingkaran, serta sifat segitiga siku-siku. Setelah tahu posisi titik di lingkaran bisa dilanjutkan dengan menghubungkan dengan sisi persegi dan akhirnya bisa ditentukan luas daerah persegi. Adapun masalah pertama disajikan seperti berikut.

Masalah 1

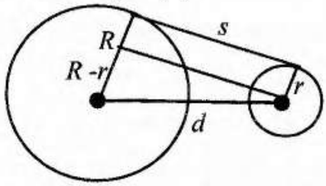
Dua lingkaran masing-masing berjari-jari 7 cm dan 2 cm. Panjang garis singgung persekutuan luarnya adalah 12 cm. Jika A dan B masing-masing merupakan titik-titik sudut di suatu persegi sehingga A pada lingkaran pertama dan B berada pada lingkaran kedua, maka tentukan luas daerah terkecil dari persegi tersebut!

Penyelesaian masalah tersebut memerlukan tahapan-tahapan: (1) menyelesaikan garis singgung, (2) mengonstruksi persegi, dan (3) menentukan luas daerah persegi. Sebaran penyelesaian siswa dapat dikelompokkan menjadi: (1) menyelesaikan garis singgung, hasilnya benar tetapi tidak mampu melanjutkan ke konstruksi persegi; (2) menyelesaikan garis singgung hasilnya salah dan tidak melanjutkan ke konstruksi persegi; (3) menyelesaikan garis singgung hasilnya salah berlanjut ke masalah persegi juga salah, (4) menyelesaikan masalah garis singgung hasilnya benar dilanjutkan ke konstruksi persegi tetapi salah; (5) menyelesaikan garis singgung secara benar dan melanjutkan konstruksi persegi dan luas secara benar; dan (6) tidak menjawab. Sebaran hasil penyelesaian siswa terhadap masalah pertama disajikan pada Tabel 6.1. berikut.

Tabel 6.1. Sebaran Penyelesaian Siswa dalam Mmemecahkan Masalah

No	Sebaran Bentuk Selesaian	frek	prosentase
1	Menyelesaikan garis singgung saja dan hasilnya benar	214	54,73
2	Menyelesaikan garis singgung saja tapi hasilnya salah	36	9,21
3	Menyelesaikan garis singgung (salah) & persegi (salah)	12	3,07
4	Menyelesaikan garis singgung (benar) & persegi (salah)	61	15,60
5	Menyelesaikan garis singgung (benar) & persegi (benar)	54	13,81
6	Tidak menjawab	14	3,58

Dalam memecahkan masalah pertama sebagian besar siswa (214 orang dari 391 siswa atau 54,73%) hanya mampu menyelesaikan sampai pada menentukan jarak kedua lingkaran. Siswa mudah menyelesaikan jarak kedua lingkaran karena sampai pada langkah ini masih bisa diselesaikan dengan prosedural. Siswa sudah tahu rumus jarak dua lingkaran (d) dikaitkan dengan jari-jari (R & r) dan panjang garis singgung persekutuan luarnya (s).



Berdasarkan pada gambar tersebut, rumus jarak dua lingkaran (d) dapat dihitung sebagai berikut.

$$d^2 = s^2 + (R-r)^2 = 12^2 + (7-2)^2 = 144 + 25 = 169$$
$$d = \sqrt{169}.$$

Masalah kedua berkaitan dengan materi faktor persekutuan dari bilangan. Masalah kedua bersifat open ended. Siswa harus memodelkan masalah ke dalam masalah matematika dan mencoba berbagai kemungkinan yang bisa memenuhinya. Adapun masalah kedua disajikan seperti berikut.

Masalah 2

Seorang anak mengumpulkan laba-laba dan kumbang di dalam sebuah kotak, kemudian dia menghitung jumlah kaki-kakinya. Ternyata banyak kaki laba-laba dan kumbang adalah 54. Jika laba-laba kakinya 8 dan kumbang kakinya 6, maka berapa jumlah laba-laba dan kumbang yang dikumpulkan?

Penyelesaian masalah 2 memerlukan tahapan-tahapan: (1) memodelkan banyak kumbang dan jumlah kakinya, (2) memodelkan banyak laba-laba dan kakinya; (3) memodelkan banyak kaki laba-laba dan kumbang sama dengan 54; dan (4) menentukan kemungkinan banyak laba-laba dan kumbang yang memenuhi jumlah kakinya 54. Sebaran penyelesaian siswa dikelompokkan menjadi: (1) Menyusun model, menyelesaikan dengan coba-coba dan hasilnya benar; (2) Menyusun model, menyelesaikan dengan coba-coba dan hasilnya salah; (3) Menyusun model matematika tapi tidak tahu tindak lanjutnya; (4) Menyusun model, menentukan kelipatan, dan menyimpulkan hasil dengan benar; (5) Membuat model tetapi salah; dan (6) tidak menjawab. Adapun sebaran hasil penyelesaian siswa terhadap masalah kedu disajikan pada Tabel 6.2 berikut.

Tabel 6.2 Sebaran Penyelesaian Siswa dalam Memecahkan Masalah Kedua

No	Sebaran Bentuk Selesaian	frek	prosentase
1	Menyusun model, menyelesaikan dengan coba-coba dan hasilnya benar	127	32,48
2	Menyusun model, menyelesaikan dengan coba-coba dan hasilnya salah	43	10,99
3	Menyusun model matematika tapi tidak tahu tindak lanjutnya	112	28,64
4	Menyusun model, menentukan kelipatan, dan menyimpulkan hasil dengan benar	52	13,30
5	Membuat model tetapi salah	32	8,18
6	Tidak menjawab	25	6,39

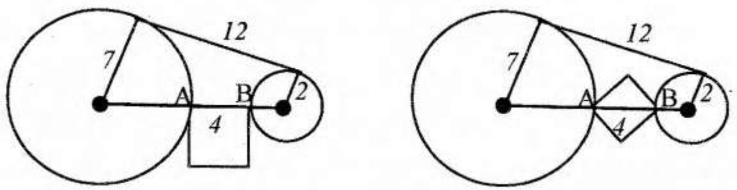
Dalam memecahkan masalah kedua sebagian siswa menyelesaikan dengan benar dan sebagian yang lain menjawab salah. Kesalahan terjadi setelah memodelkan $8x + 6y = 54$, mereka tidak bisa menindaklanjuti. Siswa bingung apa yang harus dilakukan, karena model yang diperoleh memuat dua variabel dan persamaannya hanya satu. Biasanya mereka bisa menyelesaikan persamaan dua variabel kalau diberikan dua persamaan. Sehingga siswa menganggap masalah tersebut salah dan tidak bisa diselesaikan.

B. Kesalahan (Ketiadaan) Konektif Siswa dalam Menyelesaikan Masalah

Untuk mengungkap terjadinya kesalahan siswa dalam pemecahan masalah matematika dilakukan dengan memberikan 2 (dua) masalah. Masalah pertama berkaitan dengan konsep garis singgung dan luas daerah. Siswa harus memahami koneksi antara garis singgung dan luas daerah persegi yang terbentuk. Masalah kedua berkaitan dengan bilangan, yakni faktor persekutuan terbesar dari dua bilangan. Kedua masalah tesebut merupakan masalah "tidak rutin" bagi siswa. Untuk menyelesaikannya membutuhkan berpikir tingkat tinggi dan strategi pemecahan masalah yang "tidak standar". Hal ini dimaksudkan untuk mengungkap kesalahan-kesalahan yang terjadi dalam pemecahan masalah tersebut.

Kesalahan berpikir siswa dalam menyelesaikan masalah matematika ditelusuri dengan menggunakan struktur masalah dan struktur berpikir siswa. Struktur masalah yang dimaksud adalah proses penyelesaian masalah secara ideal, sedangkan struktur berpikir siswa digambarkan berdasarkan alur penyelesaian yang dikonstruksi oleh siswa.

Untuk masalah pertama, struktur masalah dapat digambarkan menggunakan diagram yang mencerminkan bagaimana masalah tersebut diselesaikan. Ada dua tahapan masalah yang terkait dengan soal tersebut. *Pertama*, garis singgung persekutuan luar dan luas daerah persegi yang sisinya bergantung dari jarak dua lingkaran. Ada dua lingkaran yang masing-masing berjari-jari 7 cm dan 2 cm. Panjang garis singgung persekutuan luarnya 12 cm, berarti bisa dicari jarak kedua pusat lingkaran dengan menggunakan teorema phytagoras, yakni 13 cm. Sementara sudah diketahui selisih panjang jari-jari kedua lingkaran adalah 7 cm - 2 cm = 5 cm. Sehingga bisa ditentukan titik A dan B yang terdekat (agar luasnya minimum), yakni titik A pada lingkaran pertama dan titik B pada lingkaran kedua yang dilalui oleh garis penghubung kedua pusat lingkaran, sehingga titik A dan B berjarak 4 cm. Titik A dan B merupakan titik sudut dari persegi, berarti ada dua kemungkinan bentuk perseginya: (1) AB sebagai sisi dan (2) AB sebagai diagonal. Kedua kemungkinan tersebut dapat digambarkan sebagai berikut.



Untuk kasus AB sebagai sisi dapat dibuat persegi dengan panjang sisi 4 cm dan diperoleh luas daerah = 16 cm². Untuk kasus AB sebagai diagonal, dengan menggunakan teorema phytagoras diperoleh

$d^2 = s^2 + s^2$

$4^2 = 2\ s^2$

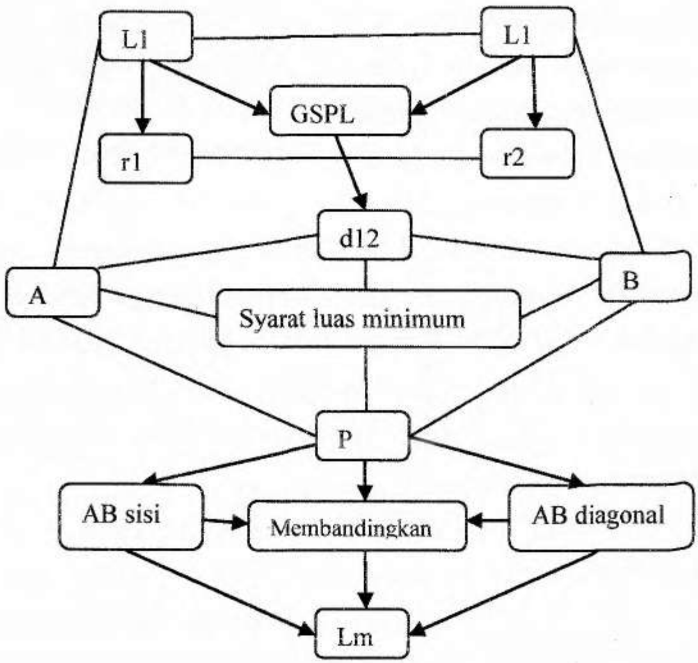
$16 = 2\ s^2$

$s^2 = 8$

Jadi ditemukan luas daerah persegi panjangnya sama dengan 8 cm².

Dengan membandingkan kedua kasus tersebut dapat disimpulkan bahwa luas minimum dari persegi yang dapat dibuat sama dengan 8 cm². Dalam proses pemecahan masalah ini, siswa harus mampu mengaitkan beberapa konsep terkait dengan garis singgung persekutuan dua lingkaran, posisi titik A dan titik B, dan persegi yang terbentuk dengan memandang AB sebagai sisi atau AB sebagai diagonal.

Lebih jauh siswa harus mampu membuat beberapa koneksi konsep matematika: (1) koneksi garis singgung, jari-jari dan jarak dua lingkaran; (2) koneksi jarak dua lingkaran dan posisi titik A dan B pada lingkaran; (3) koneksi luas minimum dan posisi titik A dan titik B, (4) koneksi sisi AB dengan komponen-komponen di lingkaran. Berdasarkan proses tersebut, struktur masalah disajikan seperti berikut.



Keterangan:

GSPL = garis singgung persekutuan luar lingkaran

L_1 = lingkaran 1

r_1 = jari-jari lingkaran pertama

L_2 = lingkaran 2

r_2 = jari-jari lingkaran kedua

d_{12} = jarak antara lingkaran pertama dan lingkaran kedua

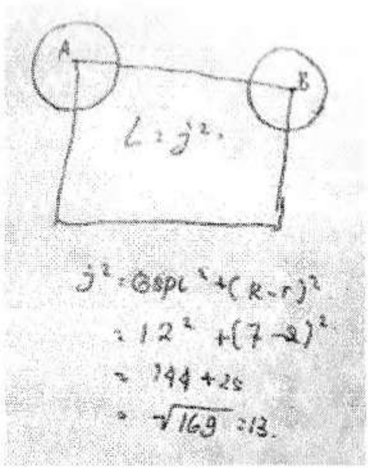
P = persegi

A = titik A

B = titik B

Lm = luas minimum

Terjadinya kesalahan siswa dalam mengonstruksi pemecahan masalah pertama meliputi: kesalahan membuat koneksi, ketidakcukupan pengetahuan awal, kesalahan bernalar logis, ketidaklengkapan proses akomodasi, dan dominasi berpikir prosedural.

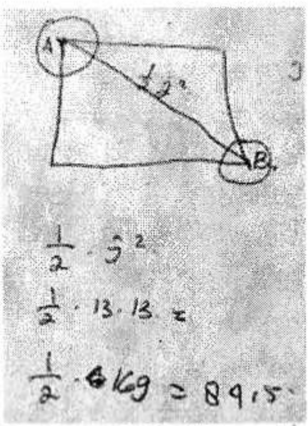


Gambar 6.1 Hasil Penyelesaian Siswa

Kesalahan dalam membuat koneksi tampak pada saat siswa sudah menemukan jarak kedua pusat lingkaran. Siswa mudah menyelesaikan jarak kedua lingkaran karena sampai pada langkah ini masih bisa diselesaikan dengan prosedural. Siswa sudah tahu rumus jarak dua lingkaran (d) dikaitkan dengan jari-jari (R & r) dan panjang garis singgung persekutuan luarnya (s). Bahwa rumus jarak dua lingkaran (d) yang digunakan adalah

$$d^2 = s^2 + (R\text{-}r)^2 = 12^2 + (7\text{-}2)^2 = 144 + 25 = 169$$

$$d = \sqrt{169}$$



Gambar 6.2 Hasil Pengerjaan Siswa

Meskipun jarak kedua pusat lingkaran sudah ditemukan, namun siswa tidak bisa melanjutkan lagi untuk menentukan sisi persegi yang diinginkan. Pola kesalahan siswa tersebut adalah tidak bisa membuat koneksi (*nothing connection*) satu masalah dengan masalah lain. Proses berpikir yang dominan pada siswa adalah berpikir prosedural. Siswa mampu menyelesaikan masalah yang membutuhkan berpikir prosedural tetapi gagal ketika masalah yang disajikan non rutin. Ketika sudah memperoleh jawaban panjang garis singgung, siswa tidak bisa mengaitkan dengan titik A dan titik B yang ada pada lingkaran dan ada syarat luasnya minimum. Siswa tidak menangkap bahwa luas minimum akan terjadi bila panjang sisinya paling kecil. Siswa langsung menjadikan panjang garis singgung sebagai panjang sisinya. Dari aspek berpikir siswa sudah melakukan proses akomodasi, namun akomodasi belum lengkap (belum bisa menempatkan titik A dan B) sudah digunakan untuk menyelesaikan masalah, sehingga hasil yang diperoleh salah. Hal ini terlihat dari hasil wawancara dengan peneliti.

P: bisa diceritakan bagaimana proses menjawab masalah ini?

S1: Awalnya saya gambar lingkaran besar dengan jari-jari 7 cm dan lingkaran kecil dengan jari-jari 2 cm, kemudian saya buat garis singgung persekutuan luarnya (sambil menunjukkan garis singgung persekutuan luar) dengan panjang 12 cm. Sebenarnya saya tidak paham dengan kalimat terakhir itu yaitu "jika A dan B masing-masing merupakan titik sudut persegi sehingga A pada lingkaran pertama dan B pada lingkaran kedua maka tentukan luas terkecil dari persegi tersebut. Dari situ saya tidak bisa menemukan persegi terkecil yang dimaksudkan oleh soal.

P: Terus apa yang kamu lakukan berikutnya

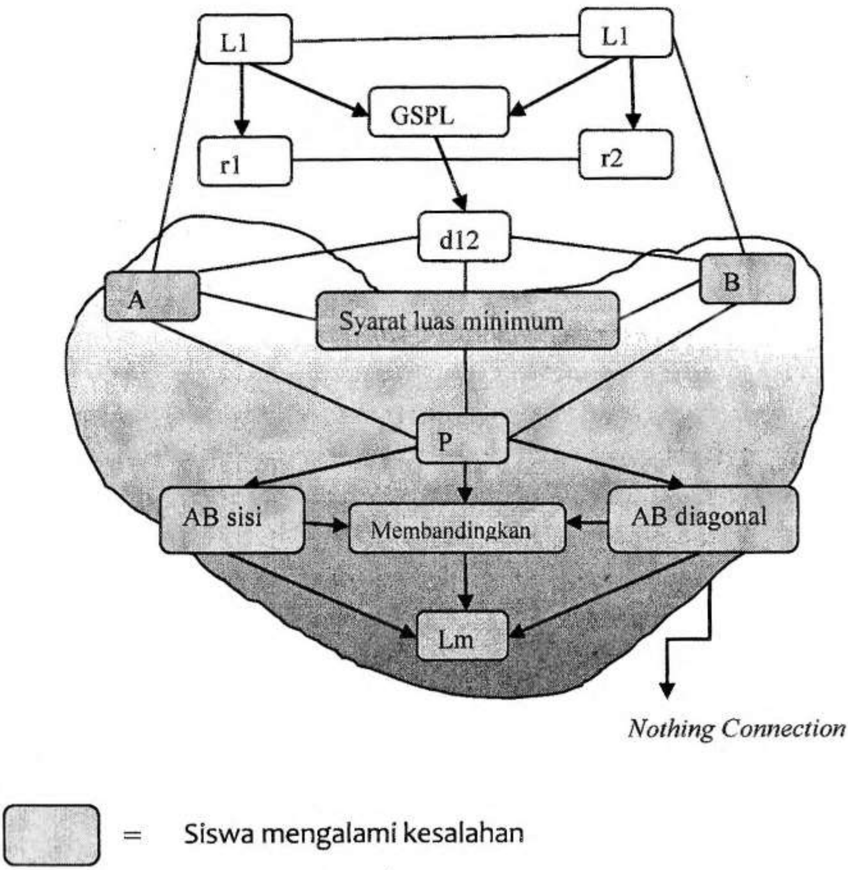
S1: saya mencoba memikirkan agi, dan akhirnya saya jawab seperti ini

P: bagaimana memperoleh luas setelah j kuadrat?

S1: sebelumnya saya berpikir agak lama, bagaimana ya maksud dari soal ini. Setelah saya menggambar garis singgung persekutuan, ada bentuk yang mirip persegi dan ada segitiga. Luas segitiga itu rumusnya kan setengah alas dikalikan tinggi. Karena bentuknya persegi, maka luas daerah segitiganya ya setengah j kuadrat.

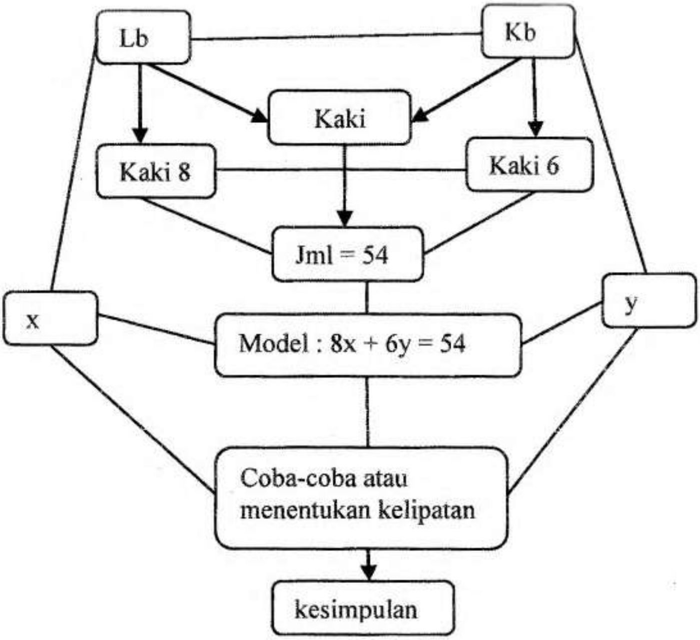
Dari wawancara tersebut terlihat bahwa siswa sudah melakukan akomodasi dengan mencoba mengubah-ubah bentuk persegi, namun akhirnya dipilih luas daerah segitiga, sehingga jawabannya tidak logis. Siswa juga terlihat bahwa dia tidak bisa mengaitkan (membuat koneksi) masalah persegi dengan lingkaran.

Proses menarik kesimpulan tentang luas daerah tidak jelas (tidak logis) bahwa luas daerahnya setengah dari persegi. Sehingga jawaban yang diperoleh salah. Proses berpikir siswa dalam menyelesaikan masalah pertama dapat digambarkan sebagai berikut.



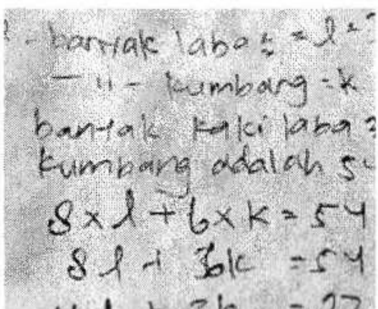
Dari diagram terlihat bahwa siswa mulai mengalami kesalahan ketika sudah memperoleh panjang garis singgung persekutuan dua lingkaran. Siswa mengalami kesalahan bahwa A dan B adalah di lingkaran diartikan A dan B di pusat lingkaran, sehingga persegi yang terbentuk sisinya 13 cm. Yang menjadi masalah berikutnya, dengan samar-samar mereka menentukan rumus luas daerahnya dengan menggunakan setengah dari persegi. Terbentuknya rumus setengah dari persegi sebagai pengaruh dari kata "luas minimum". Pada dasarnya alasan tersebut tidak masuk akal.

Kesalahan konektif juga terjadi pada masalah kedua. Untuk masalah kedua, struktur masalahnya dapat digambarkan menggunakan diagram yang mencerminkan proses penyelesaian masalah tersebut. Di kandang ada laba-laba kakinya 8 dan kumbang kakinya 6. Banyaknya laba-laba dan kumbang belum tahu. Tetapi jumlah kakinya ada 54. Kalau dimisalkan banyaknya laba-laba x dan banyak kumbang y, maka diperoleh $8x + 6y = 54$. Dari bentuk tersebut bisa dicoba untuk $x = 1$ (artinya laba-labanya 1 ekor), maka $6y = 54 - 8 = 46$ dan $y = 46/6$. Hal ini tidak mungkin, karena berbentuk pecahan. Misalkan $x = 2$ (laba-laba 2 ekor), banyaknya kumbang bisa ditentuka $6y = 54 - 16 = 38$ dan diperoleh $y = 38/6$. Hal ini juga tidak mungkin, karena hasilnya pecahan. Misalkan $x = 3$ (laba-laba 3 ekor), banyaknya kumbang bisa ditentuka $6y = 54 - 24 = 30$ dan diperoleh $y = 5$ (banyak kumbang 5 ekor). Coba-coba bisa dilanjutkan sampai memperoleh semua kemungkinannya. Adapun struktur masalah tersebut dapat digambarkan sebagai berikut.



Keterangan:
Lb = laba-laba; Kb = kumbang; x = banyaknya laba-laba;
y = banyaknya kumbang

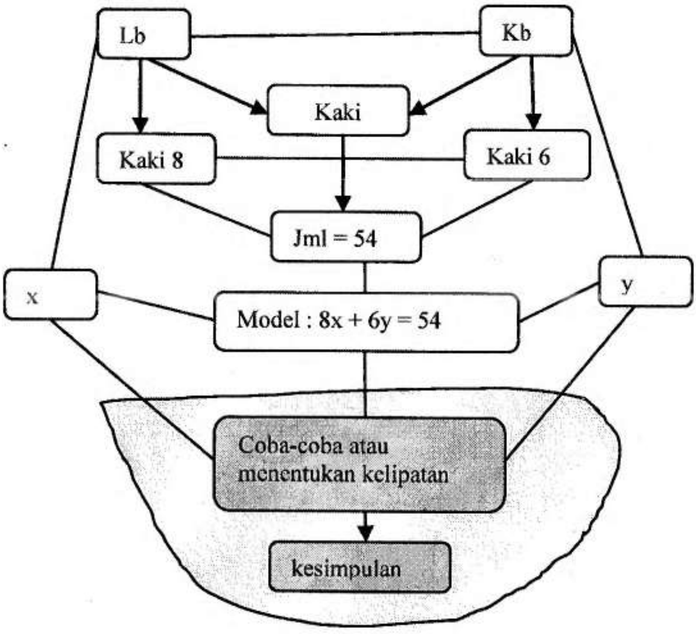
Kesalahan berpikir siswa dalam memecahkan masalah matematika mencakup: kesalahan membuat koneksi, ketidakcukupan pengetahuan awal, ketidaklengkapan proses akomodasi, dan dominasi berpikir prosedural. Kesalahan menjawab masalah kedua, terjadi terutama setelah memodelkan 8x + 6y = 54, mereka tidak bisa menindaklanjuti (tidak cukup pengetahuan awalnya). Siswa bingung apa yang harus dilakukan, karena model yang diperoleh memuat dua variabel dan persamaannya hanya satu.



Gambar 6.3 Penyelesaian Siswa

Siswa tidak bisa membuat koneksi. Biasanya mereka bisa menyelesaikan persamaan dua variabel kalau diberikan dua persamaan. Sehingga siswa menganggap masalah tersebut tidak bisa diselesaikan. Berpikir siswa masih didominiasi oleh prosedural. Masalah tersebut bisa diselesaikan apabila sesuai dengan prosedur rutin yang biasa dilakukan.

Siswa yang mengalami kesalahan seperti ini dikarenakan tidak biasa menghadapi masalah open ended, tidak bisa membuat koneksi, dan tidak bisa berpikir non prosedural. Proses berikir siswa yang mengalami kesalahan dapat digambarkan sebagai berikut.



Pada dasarnya banyak siswa mampu membuat model matematika dari masalah kedua, namun ketika masalah yang dihadapi tidak biasa dia temukan, maka siswa mengalami kebingungan. Siswa tidak bisa melanjutkan proses penyelesaian. Kesalahan berpikir siswa dalam membuat koneksi, ketidakcukupan pengetahuan awal, ketidaklengkapan proses akomodasi, dan dominasi berpikir prosedural juga tergambar dari hasil wawancara dengan siswa seperti berikut.

P: bagaimana anda menyelesaikan masalah kedua?
S2: Ini juga awalnya belum ketemu
P: Coba ceritakan apa yang kamu pahami dari soal itu!
S2: kaki laba-laba dan kumbang itu jumlahnya 54. Terus kakinya laba-laba = 8 dan kaki kumbang = 6. Yang dicari itu jumlah kaki laba-laba dan kaki kumbangnya
P: Nah... bagaimana strtaegi/ caramu untuk menemukan itu
S2: ini dijumlah terus dibagi...
P: iya bagaimana?
S2: 8 + 6 = 14. Terus 54 : 14 = ... Ini ndak bisa ya.
P: silahkan dicoba lagi?
S2: (siswa berpikir kembali) Ini kemungkinannya (54:8) + (54:6) = 6 + 9 =15. Nah ini ketemu laba-laba = 6 dan kumbang = 9. Jadi jumlah kumbang dan laba-laba = 15
P: mengapa terpikir ini dibagi satu-satu
S2: karena kakinya sendiri-sendiri jadi dibagi satu persatu
P: apakah kamu yakin dengan jawabanmu ini
S2: yakin benar. Karena ini kan kakinya sudah dibedakan terlebih dahulu

S2 mengalami kesalahan melakukan akomodasi kaki laba-laba dijumlahkan dengan kaki kumbang dan digunakan untuk membagi 54. Tetapi akhirnya menyimpulkan tidak bisa. Hal ini menunjukkan adanya akomodasi tetapi masih belum lengkap sudah digunakan untuk menyelesaikan (membagi 54 dengan 14). S2 juga mengalami kesalahan berpikir logis. Masing-masing banyaknya kaki dijadikan pembagi 54 dengan alasan kakinya masing-masing. Alasan tersebut tidak masuk akal, tetapi digunakan untuk meng-eksekusi jawaban.

BAB VII
RINGKASAN DAN DISKUSI

A. Konstruksi Konsep Matematika dan Permasalahannya

Masalah yang terjadi dalam proses konstruksi konsep matematika siswa dapat diklasifikasikan dalam empat bentuk, yakni *pseudo-contruction*, lubang konstruksi, *mis-analogical contruction*, dan *mis-logical contruction*. **Pseudo construction** terjadi pada saat siswa mengonstruksi konsep operasi aljabar, luas daerah, dan masalah waktu. Dalam proses mengonstruksi konsep operasi aljabar, pseudo construction terjadi ketika siswa dihadapkan pada masalah $2x + 3x = 5x$. siswa menyatakan bahwa pernyataan tersebut benar. Jawaban siswa tersebut benar, namun ketika ditelusuri lebih lanjut, konstruksi siswa semu (pseudo construction). Siswa mengonstruksi variabel x sebagai benda, sehingga masalah $2x + 3x = 5x$ dikonstruksi sebagai penjumlahan 2 buku dan tiga buku menghasilkan 5 buku. Kesalahan ini juga terjadi pada saat siswa mengonstruksi variabel x dan y pada kasus $2x + 3y = 5xy$. Siswa menginterpretasikan x dan y bukan sebagai bilangan, tetapi merupakan " benda". Sehingga alasan penjumlahan $2x + 3y$ tidak bisa dilakukan bukan karena sifat bilangan, tetapi karena bendanya berbeda.

Pesudo konstruksi juga terjadi ketika siswa mengonstruksi konsep luas daerah. Siswa bisa menghitung luas daerah dan bisa menuliskan satuan luasnya dengan m^2, namun proses mengonstruksinya masih semu. Konsep luas belum terkonstruksi, hanya prosedur yang berhasil dikonstruksi. Hal ini ditandai dengan pernyataan siswa tentang satuan m^2 dihasilkan dari mxm bukan dari konsep persegi satuan.

Lubang konstruksi terjadi pada konsep aljabar, konsep luas, dan konsep segitiga. Kesalahan dalam konsep aljabar juga dapat dipotret dari sisi lubang konstruksi. Siswa bisa menjawab 2x + 3x = 5x atau memahami bahwa 2x + 3y tidak dijumlahkan, namun konstruksi yang dilakukan masih salah. Hal ini dapat dilihat dari hasil wawancara secara mendalam, bahka 2x + 3x = 5x (dapat dijumlahkan) karena bendanya sama, dengan kata lain variabel x dikonstruksi sebagai benda, sehingga konstruksi penjumlahan tersebut masih belum utuh sesuai dengan makna sesungguhnya. Dengan kata lain siswa mengalami lubang konstruksi. Konstruksi siswa ada yang kosong dari makna (bagian tertentu masih belum terkonstruksi), meskipun mereka bisa menjawab permasalahan.

Lubang konstruksi juga terjadi pada masalah luas daerah. Siswa bisa menentukan luas daerah persegi panjang yang memiliki panjang 6 m dan lebar 5 m, namun setelah ditelusuri lebih mendalam melalui indept interview konsep yang dikonstruksi salah. Konstruksi hanya pada prosedur menentukan luas daerah, BUKAN konsep luas daerah. Konstruksi konsep luas daerahnya masih kosong atau disebut lubang konstruksi. Meskipun siswa bisa menghitung luas daerah, namun mereka tidak memahami sesungguhnya luas daerah.

Lubang konstruksi juga terjadi pada masalah segitiga. Dalam hal ini ada konsep yang tidak terkonstruksi, yakni syarat untuk membuat suatu segitiga, yakni jumlah panjang dua sisi sebarang harus **lebih besar** dari panjang satu sisi yang lain. Dalam kasus tersebut 6 + 7 = 13 < 14, jadi tidak memenuhi syarat suatu segitiga. Siswa tidak tahu atau tidak memperhatikan syarat dan langsung menyimpulkan bahwa segitiga tersebut bisa dibuat, karena ada tiga sisi. Bagi siswa yang penting ada tiga sisi berarti bisa dibuat segitiga, tanpa memperhatikan panjang dari ketiga sisinya. Siswa yang lain memeriksa segitiga atau bukan segitiga dengan menggunakan teorema phytagoras. Proses konstruksi siswa "lubang" pada justifikasi segitiga harus phytagoras, karena itu segitiga harus memenuhi triple phytagoras. Lubang konstruksi juga terjadi pada masalah gradien garis, ketika dihadapkan pada pernyataan "setiap dua garis yang tegak lurus, PASTI perkalian gradiennya sama dengan -1". Lubang konstruksi terjadi pada proses mengonstruksi perkalian gradien dikaitkan dengan posisi siku-siku kedua garis. Proses konstruksi mestinya dimulai dari konsep garis sejajar dengan sumbu X atau sumbu Y, dilanjutkan dengan garis yang tidak sejajar sumbu. Sifat perkalian gradien dua garis bernilai -1 hanya terjadi pada garis yang tidak sejajar sumbu.

Mis-analogical contruction terjadi ketika siswa mengonstruksi konsep akar, pangkat, dan fungsi. Dalam konstruksi akar dan pangkat, siswa menganggap bahwa operasi dalam bilangan akar dan pangkat sama dengan operasi bilangan biasa. Siswa tidak mengontruksi sifat akar dan pangkat sebagai sesuatu yang berbeda dengan sifat operasi bilangan biasa. Proses analogi salah juga terjadi pada kasus fungsi. Siswa masih banyak yang mengonstruksi analogi salah ketika dihadapkan pada pernyataan jika f(a) = f(b) maka a = b. Siswa menganggap f(a) = f(b) analog dengan perkalian m.a = m.b. Pada kasus perkalian ma = mb dapat disederhanakan dengan membagi kedua ruas dengan m (untuk m tak nol), sehingga diperoleh a = b. Dalam fungsi diberlakukan prosedur yang sama (analog). *Mis-analogical contruction* pada masalah akar juga terjadi pada saat siswa menilai pernyataan $\sqrt{3} + \sqrt{3} = \sqrt{6}$ dan pernyataan $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$. Siswa menganggap bahwa dalam akar tidak ada bedanya dengan bilangan bukan akar. Sehingga berlaku sifat penjumlahan biasa. Sehingga $\sqrt{6}$ bisa ditulis sebagai bentuk $\sqrt{3} + \sqrt{3}$ atau $\sqrt{4} + \sqrt{2}$ atau $\sqrt{1} + \sqrt{5}$. Dalam hal ini ada proses analogi dengan operasi bilangan biasa, 6 bisa direpresentasikan sebagai penjumlahan 3 + 3, 4 + 2 atau 5 + 1. Konstruksi dengan analogi yang salah juga terjadi pada masalah $(x+y)^2$. Siswa menganalogikan bentuk $(x+y)^2$ dengan bentuk $(xy)^2$. Karena $(xy)^2 = x^2y^2$, maka $(x+y)^2 = x^2 + y^2$. Siswa memandang kedua bentuk tersebut sebagai bentuk yang analog, sehingga hasilnya sama

Mis-logical construction terjadi pada kasus siswa dihadapkan pada pernyataan "misalkan x, y, dan z bilangan bulat. Jika $x < z$ dan $y < z$, maka $x = y$". Siswa mengonstruksi konsep tersebut dengan berpikir bahwa karena x dan y sama-sama kurang dari z, maka x = y. Siswa tidak bisa mengonstruksi bahwa banyak alternatif yang terjadi ketika x < z dan y < z. Siswa menangkap pernyataan x < z dan y < z, x dan y merupakan nilai yang tunggal. Karena nilai x & y tunggal dan tidak ada alternatif lain, maka siswa membuat kesimpulan x = y. Hal ini juga terjadi pada kasus himpunan. A bagian dari C dan B bagian dari C, seharusnya konsep tersebut dikonstruksi dengan banyak kemungkinan yang terjadi tetapi diklaim A dan B hanya tunggal dan sama, sehingga bisa disimpulkan hasilnya sama. Dalam kasus A bagian dari C dan B bagian dari C ada lima kemungkinan yang terjadi: (1) A terpisah B; (2) A sama dengan B; (3) A bagian dari B; (4) B bagian dari A; dan (5) A berbeda dengan B tetapi beririsan. Namun siswa hanya mengosntruksi A sama dengan B dan mengabaikan kemungkinan yang lain.

B. Konstruksi Pemecahan Masalah Matematika

Tugas konstruksi pemecahan masalah dieksplorasi melalui pemberian dua masalah berikut.

Masalah 1

Dua lingkaran masing-masing berjari-jari 7 cm dan 2 cm. Panjang garis singgung persekutuan luarnya adalah 12 cm. Jika A dan B masing-masing merupakan titik-titik sudut di suatu persegi sehingga A pada lingkaran pertama dan B berada pada lingkaran kedua, maka tentukan luas terkecil dari persegi tersebut!

Masalah 2

Seorang anak mengumpulkan laba-laba dan kumbang di dalam sebuah kotak, kemudian dia menghitung jumlah kaki-kakinya. Ternyata banyak kaki laba-laba dan kumbang adalah 54. Jika laba-laba kakinya 8 dan kumbang kakinya 6, maka berapa jumlah laba-laba dan kumbang yang dikumpulkan?

Terjadinya kesalahan siswa dalam mengonstruksi pemecahan masalah pertama meliputi: kesalahan membuat koneksi, ketidakcukupan pengetahuan awal, kesalahan bernalar logis, ketidaklengkapan proses akomodasi, dan dominasi berpikir prosedural. Kesalahan dalam membuat koneksi tampak pada saat siswa menyelesaikan masalah garis singgung dua lingkaran dan sudah menemukan jarak kedua pusat lingkaran. Siswa mudah menyelesaikan jarak kedua lingkaran karena sampai pada langkah ini masih bisa diselesaikan dengan prosedural. Siswa sudah tahu rumus jarak dua lingkaran (d) dikaitkan dengan jari-jari (R & r) dan panjang garis singgung persekutuan luarnya (s). Pola kesalahan siswa tersebut adalah tidak bisa membuat koneksi (*nothing connection*) satu masalah dengan masalah lain. Dalam hal ini tidak bisa membuat koneksi antara masalah lingkaran, titk A dan titik B pada lingkaran, menentukan ruas garis AB sebagai sisi persegi atau ruas garis AB sebagai diagonal persegi. Proses berpikir yang dominan pada siswa adalah berpikir prosedural. Siswa mampu menyelesaikan masalah yang membutuhkan berpikir prosedural tetapi gagal ketika masalah yang disajikan non rutin. Ketika sudah memperoleh jawaban panjang garis singgung, siswa tidak bisa mengaitkan dengan titik A dan titik B yang ada pada lingkaran dan ada syarat luasnya minimum. Siswa tidak menangkap bahwa luas minimum akan terjadi bila panjang sisinya paling kecil. Siswa langsung menjadikan panjang garis singgung sebagai panjang sisinya. Dari aspek berpikir siswa sudah melakukan proses akomodasi, namun akomodasi belum lengkap (belum bisa menempatkan titik A dan B) sudah digunakan untuk menyelesaikan masalah, sehingga hasil yang diperoleh salah.

Kesalahan menjawab masalah kedua, terjadi terutama setelah memodelkan $8x + 6y = 54$, mereka tidak bisa menindaklanjuti (tidak cukup pengetahuan awalnya). Siswa bingung apa yang harus dilakukan, karena model yang diperoleh memuat dua variabel dan persamaannya hanya satu. Siswa tidak bisa membuat koneksi. Biasanya mereka bisa menyelesaikan persamaan dua variabel kalau diberikan dua persamaan. Sehingga siswa menganggap masalah tersebut tidak bisa diselesaikan. Berpikir siswa masih didominasi oleh prosedural. Masalah tersebut bisa diselesaikan apabila sesuai dengan prosedur rutin yang biasa dilakukan. Pada dasarnya banyak siswa mampu membuat model matematika dari masalah kedua, namun ketika masalah yang dihadapi tidak biasa dia temukan, maka siswa mengalami kebingungan. Siswa tidak bisa melanjutkan proses penyelesaian, karena tidak ada prosedur yang sesuai. Hal ini menunjukkan adanya dominasi berpikir prosedural siswa dalam menyelesaikan masalah, sehingga ketika mereka merasa tidak ada prosedur baku yang sesuai maka mereka tidak bisa menyelesaikan masalah.

C. Diskusi

Proses konstruksi konsep matematika oleh siswa penting untuk dikaji, karena proses konstruksi tersebut dapat digunakan untuk menelusuri letak kesalahan dan menelusuri "bagaimana terjadinya kesalahan". Hasil penelusuran dapat digunakan untuk memperbaiki kesalahan secara tepat, efektif, dan efisien. Konstruksi konsep matematika sebagai bentuk dari hasil belajar matematika siswa, karena itu kesalahan konstruksi juga mencerminkan kesalahan belajar matematika siswa. Kesalahan belajar matematika siswa perlu mendapatkan perhatian yang serius agar dapat digunakan untuk meningkatkan prestasi matematika siswa.

Sudah banyak ahli yang mengaji kesalahan matematika siswa baik dalam proses mengonstruksi konsep maupun pemecahan masalah (Brodie, 2010; Shein, 2012; Gal & Linchevski, 2010; Bingolbali, dkk, 2010). Dalam penelitian ini telah ditemukan bentuk-bentuk kesalahan konstruksi konsep matematika siswa, yakni pseudo konstruksi, lubang konstruksi, kesalahan berpikir analogis, dan kesalahan berpikir logis. Penelitian ini juga menemukan kesalahan dalam proses pemecahan masalah, yaitu kesalahan berpikir analogis dan kesalahan berpikir konektif. Hasil penelitian ini merupakan penelusuran lebih mendalam dari penelitian-penelitian terdahulu yang sudah dilakukan. Harapannya adalah dapat memotret secara terperinci terjadinya kesalahan konstruksi konsep dan pemecahan masalah matematika.

Hasil penelitian ini masih terbatas pada penelusuran kesalahan konstruksi dan pemecahan masalah matematika dan belum mengaji bagaimana memperbaiki kesalahan tersebut. Berdasarkan adanya kesalahan dalam proses konstruksi yang berbentuk *pseudo-contruction*, lubang konstruksi, *mis-analogi*, dan *mis-logical* tersebut, maka membuka peluang penelitian lanjutan tentang defragmenting dengan melakukan penataan kembali struktur berpikir siswa. Defragmenting terhadap struktur berpikir siswa dapat dilakukan dalam bentuk ***memunculkan skema (schema appearances), merajut skema (schema knitting), konflik kognitif, memperbaiki berpikir logis, dan merajut koneksi dalam pemecahan masalah.*** Defragmenting dalam bentuk memunculkan skema dilakukan dengan restrukturisasi skema yang sudah ada. Defragmenting dalam bentuk merajut skema dilakukan dengan membuat hubungan antar skema yang dimiliki oleh siswa yang belum terkait. Defragmenting dalam bentuk memperbaiki berpikir logis dilakukan dengan membangun berpikir rasionalitas pada siswa.

KEPUSTAKAAN

Brooks, J. G., & Brooks, M.G., (1993). *In search of understanding: The case for constructivist classrooms*. Alexandria, VA: The Association for Supervision and Curriculum Development

Bingolbali, E., Akkoç, H, Ozmantar M. F., &Demri, S. (2011). Pre-service and in-service teachers' views of the sources of students' mathematical difficulties. International Electronic Journal of Mathematics Education, 6(1), 40-59.

Brodie, karin, 2010. Teaching Mathematical Reasoning in Secondary School Classrooms. Springer New York Dordrecht Heidelberg London

Calder, L., dan Sarah, E., 2002. *Using "Think Alouds" to Evaluate Deep Understanding*. http://www.brevard.edu/fyc/listserv/remarks/calderandcarlson.htm. Diakses 15 September 2006

Carlson, M.; Jacobs, S.; Coe, E.; Larsen, S.& Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *J. Res. Math. Educ.* **33(5)**, 352–378. ME **2011e.**00792

Elizabeth Warren, 2003. The Role of Arithmetic Structure in the Transition from Arithmetic to Algebra. *Mathematics Education Research Journal*. Vol. 15, No. 2, 122-137

Dreifus & Kidron, 2010. Justification enlightenment and combining constructions of knowledge. *Educ Stud Math* (2010) 74:75–93

Gal andLinchevski, 2010. To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. Education Study Math, 74:163–183

Hudojo, H. 2001. *Pengembangan Kurikulum dan Pembelajaran Matematika*. JICA. Jakarta: IMSTEP.

Huitt, W dan Hummel, J., 1998. *Educational psychology interactive: Cognitive development*. http://Chir7O. Valdosta.edu/whuitt/col/cogsys/piaget.html. Diakses 5 September 2006

Huitt, W., & Hummel, J. (2003). Piaget's theory of cognitive development. Educational Psychology Interactive. Valdosta, GA: Valdosta State University. Retrieved December 15, 2015 from http://www. Edpsycinter active.org /topics/cognition/piaget.html

Jacobs, 2003. The Evolution of the Cognitive Maps. Brain Behavior E-vol 2003;62:128–139

Komf & Denicollo, 2005. Teacher Thinking Twenty Years on: Revisiting Persisting Problem and Advances in Education. Swetz & Zeitlinger Publisher. Tokyo

Leron, U.& Hazzan, O. 2009. Intuitive vs analytical thinking: four perspectives. Educ Stud Math. 71(3), 263–278. ME 2009f.00534

Lithner, J., 2000. Mathematical Reasoning in Task Solving. Educational Studies in Mathematics, Vol. 41 pages 165-190

Mullis, Ina V.S., Martin, Michel O., Foy, Pierre & Arora, Alka. 2012. TIMSS 2011 International Mathematics Report: Finding From IEA'S Trend in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eight Grades. United States: United States: International Association for the Evaluation of Educational Achievement.

NCTM, 2000. *Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM.

Pape, S., 2004. Middle School Children's Problem solving Behavior: A Cognitive Analysis from A Reading Comprehension Perspective. Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 35 Number 3 May 2004.

Pena, Sossa, &Gutierres, 2007. Cognitive Map: an Overview and Their Application for Student Modeling. ComputacionSistemas. Vol 10 No 3.

Perdikaris, 2012. Using the Cognitive Styles to Explain an Anomaly in the Hierarchy of the van Hiele Levels. Journal of Mathematical Sciences & Mathematics Education, Vol. 6 No. 2

Shein. 2012. Seeing With Two Eyes: A Teacher's Use f Gestures in Questioning and Revoicing to Engage English Language Learner in Reapir of Mathematical Errors. Journal for Research in Mathematics Education. Vol 43 no 2

Subanji, 2006. *Pseudo Penalaran Kovariasi dalam Mengkonstruksi Grafik Fungsi Kejadian Dinamik: Sebuah Analisa Berdasarkan Kerangka Kerja VL2P dan Implikasinya pada Pembelajaran Matematika.* Jurnal Ilmu Pendidikan Vol 13 Nomor 1, Februari 2006

Subanji, 2007. *Proses Berpikir Pseudo Penalaran Kovariasional Mahasiswa dalam Mengonstruksi Grafik Fungsi Kejadian Dinamik. Disertasi.* Tidak dipublikasikan. UNESA Surabaya.

Subanji, 2009. *Proses Berpikir Pseudo Penalaran Proporsional Siswa dalam Menyelesaikan Masalah Proporsi.* Hibah Fundamental.

Subanji, 2011. Proses berpikir pseudo penalaran proporsional siswa dalam menyelesaikan masalah proporsi.TEQIP Journal. Tahun III. Vol 2.

Subanji and Supratman. 2015. The Pseudo-Covariational Reasoning Thought Processes in Constructing Graph Function of Reversible Event Dynamics Based on Assimilation and Accommodation Frameworks. Journal of the Korean Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education. Volume 19 Number 1 (March 2015)

Subanji dan Nusantara, T. 2013. Karakterisasi Kesalahan Berpikir Siswa dalam Mengkonstruksi Konsep Matematika. Jurnal Ilmu Pendidikan (JIP). 19(2). 2018 - 217.

Trygve Breiteig & Barbro Grevholm. 2006. The Transition from Arithmetic to Algebra: to Reason, Explain, Argue, Generalize and Justify. Proceedings 30 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2, pp. 225-232. Prague: PME. 2- 225

Vinner, S. 1997. The pseudo-conceptual and the pseudo-analytical thought processes in mathematics Learning. *Educational Studies in Mathematics*34, pp. 97–129.

Wellings, P., 2003. *School Learning versus Life Learning: the Interaction of Spontaneous & Scientific Concepts in Development of Higher Mental Processes*. http://www.oise.utoronto.ca/~gwells/scient.concepts.txt. diakses 14 Maret 2005.

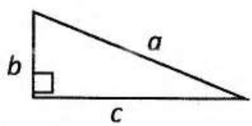
Wright, T., 2001. *Karen in Motion The Role of Physical Enactment in Developing an Understanding of distance, time, and Speed.* Journal of Mathematical Behavior vol 20 hal 145 – 162.

INSTRUMEN PENELITIAN

BAGIAN I: SOAL UTAMA

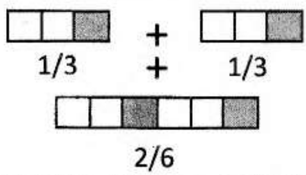
Berilah tanda silang (X) pada jawaban yang anda anggap benar dan beri alasannya!

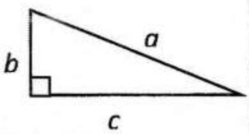
No	Pernyataan	Jawaban		Alasan
		Benar	Salah	
1	-4 - 3 = -7			
2	-4 – (-3) = -1			
3	Ada segitiga dengan ukuran sisi-sisinya 6 cm, 7 cm, dan 14 cm			
4	4 x 2 + 3 = 4 x (2 + 3)			
5	Suatu persegi panjang dengan ukuran 6 m x 5 m. Luas daerah persegi panjang tersebut adalah 30 m^2. Satuan m^2 diperoleh dari m x m			
6	$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$			
7	$\sqrt{3}+\sqrt{3}=\sqrt{6}$			
8	$\sqrt{(-3)^2}=-3$			
9	Misalkan f suatu fungsi. Jika f(a) = f(b) maka a = b			
10	$2x + 3x = 5x$			
11	2x + 3y = 5xy			

No	Pernyataan	Jawaban		Alasan
		Benar	Salah	
12	$(x+y)^2 = x^2 + y^2$			
13	Misalahkan x,y,dan z bilangan bulat. Jika $x < z$ dan $y < z$, maka $x = y$			
14	Dua garis yang tegak lurus, PASTI perkalian gradiennya sama dengan -1			
15	Misalahkan x,y,dan z bilangan bulat . Jika $x < y$ dan $x < z$, maka $y < z$			
16	Jika $A \subset C\ dan\ B \subset C$, maka $A = B$			
17	$\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$			
18	Diberikan segitiga siku-siku  Maka berlaku rumus phytagoras: $a^2 + b^2 = c^2$			
19	Dua segitiga yang kongruen PASTI sebangun			
20	Andi membeli 2 buku dan satu pensil harus membayar Rp.12.000,00. Di Toko yang sama Amir memberi satu buku dan 3 pensil harus membayar Rp.11.000,00. Model matematikanya adalah $2b + p = 12.000$ dan $b + 3p = 11.000$			

BAGIAN II: INSTRUMEN PELACAK

Berilah tanda silang (X) pada jawaban yang anda anggap benar dan beri alasannya!

No	Pernyataan	Alasan	Setuju	Tdk Setuju
1	-4 - 3 = -7	-4 – 3 = -7 (karena punya hutang 4 hutang lagi 3, hutangnya menjadi 7)		
2	-4 – (-3) = -1	-4-(-3) = -4 + 3 (karena negatif ketemu negatif adalah positif, negatif dikali negatif hasilnya positif)		
3	Ada segitiga dengan ukuran sisi-sisinya 6 cm, 7 cm, dan 14 cm	Karena ada 3 (tiga) sisi berarti bisa dibuat segitiga		
4	4 x 2 + 3 = 4 x (2 + 3)	Karena perkalian didahulukan dan dilanjutkan dengan penjumlahan		
5	Suatu persegi panjang dengan ukuran 6 m x 5 m. Luas daerah persegi panjang tersebut adalah 30 m^2. Satuan m^2 diperoleh dari *m* x *m*	L = p x l = 6 m x 5 m = 6 x 5 mxm = 30 m^2		
6	$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$	1/3 + 1/3 = 2/6 (karena memenuhi ilustrasi berikut. 		
7	$\sqrt{3}+\sqrt{3}=\sqrt{6}$	$\sqrt{3}+\sqrt{3}=\sqrt{6}$ (karena $\sqrt{3+3}=$ $\sqrt{3}+\sqrt{3}=\sqrt{6}$)		
8	$\sqrt{(-3)^2}$ = -3	$\sqrt{(-3)^2}$ = -3 (karena $\sqrt{x^2}=x$)		
9	Misalkan f suatu fungsi. Jika f(a) = f(b) maka a = b	Dengan mencoret f, maka diperoleh a = b		
10	2x + 3x = 5x	Misalkan x = buku, maka dua buku ditambah tiga buku hasilnya lima buku		

11	2x + 3y = 5xy	2x + 3y = 5xy (karena 2 kambing ditambah 3 sapi bisa menjadi 5 sapi kambing)		
12	$(x+y)^2 = x^2 + y^2$	Karena $(x+y)^2 = (x)^2 + (y)^2$; sama seperti $(xy)^2 = x^2y^2$)		
13	Misalahkan x,y,dan z bilangan bulat. Jika $x < z$ dan $y < z$, maka $x = y$	Karena x dan y sama-sama kurang dari z, maka $x = y$		
14	Dua garis yang tegak lurus, PASTI perkalian gradiennya sama dengan -1	Karena untuk dua garis yang tegak lurus dengan gradien m_1 dan m_2, rumusnya $m_1 \times m_2 = -1$		
15	Jika $x < y$ dan $x < z$, maka $y < z$	Karena x lebih kecil dari y dan x lebih kecil dari z, serta terurut, maka $y < z$		
16	Jika $A \subset C\ dan\ B \subset C$, maka $A = B$	Karena A bagian dari C dan B juga bagian dari C, maka A = B		
17	$\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$	Berlaku sama seperti $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$		
18	Diberikan segitiga siku-siku  Maka berlaku rumus phytagoras: $a^2 + b^2 = c^2$	Benar, karena rumus phytagoras: $a^2 + b^2 = c^2$		
19	Dua segitiga yang kongruen PASTI sebangun	Karena segitiga yang kongruen, semua sisinya sama panjang, sehingga juga sebangun		
20	Andi membeli 2 buku dan satu pensil harus membayar Rp.12.000,00. Di Toko yang sama Amir memberi satu buku dan 3 pensil harus membayar Rp.11.000,00. Model matematikanya adalah 2b + p =12.000 dan b + 3p = 11.000	Karena bisa dimisalkan b = buku dan p = pensil. Sehingga 2 buku ditulis 2b, satu pensil ditulis p, satu buku ditulis b, dan 3 pensil ditulis 3p		

BAGIAN III: Pemecahan Masalah

Selesaikan soal berikut dengan disertai caranya!

1. Dua lingkaran masing-masing berjari-jari 7 cm dan 2 cm. Panjang garis singgung persekutuan luarnya adalah 12 cm. Jika A dan B masing-masing merupakan titik-titik sudut di suatu persegi sehingga A pada lingkaran pertama dan B berada pada lingkaran kedua, maka tentukan luas terkecil dari persegi tersebut!

2. Seorang anak mengumpulkan laba-laba dan kumbang di dalam sebuah kotak, kemudian dia menghitung jumlah kaki-kakinya. Ternyata banyak kaki laba-laba dan kumbang adalah 54. Jika laba-laba kakinya 8 dan kumbang kakinya 6, maka berapa jumlah laba-laba dan kumbang yang dikumpulkan?

Konsep merupakan ide abstrak yang dapat digunakan untuk menggolongkan atau mengklasifikan sekumpulan objek.

Konstruksi konsep merupakan pembentukan konsep dalam pikiran siswa pada proses belajar matematika

Kesalahan konstruksi konsep merupakan penyimpangan dari konsep formal dalam proses mengonstruksi konsep matematika.

Kesalahan konstruksi pemecahan masalah merupakan penyimpangan langkah-langkah yang dilakukan oleh siswa dalam proses mengonstruksi penyelesaian masalah

Pseudo contruction merupakan konstruksi "seakan-akan benar" tetapi siswa tidak bisa memberikan justifikasi atau konstruksi "seakan-akan salah" tetapi siswa bisa memperbaiki kesalahannya setelah refleksi.

Lubang Konstruksi merupakan konstruksi konsep atau konstruksi pemecahan masalah dimana skema yang terbentuk dalam proses konstruksi ada yang belum lengkap.

Mis-analogical contruction merupakan konstruksi konsep atau konstruksi pemecahan masalah di mana dalam proses konstruksi terjadi kesalahan berpikir analogi.

Mis-logical contruction merupakan konstruksi konsep atau konstruksi pemecahan masalah di mana dalam proses konstruksinya terjadi kesalahan dalam berpikir logis.

Asimilasi merupakan proses penggabungan (*incorporation*) stimulus baru ke dalam skema yang sudah terbentuk. Proses penggabungan ditandai dengan tindakan menginterpretasi secara langsung stimulus yang diterima.

Akomodasi merupakan proses pengintegrasian stimulus baru melalui pengubahan skema lama atau pembentukan skema baru untuk menyesuaikan dengan stimulus yang diterima.

INDEKS

Dr. Subanji, M.Si. dilahirkan 5 Juni 1971 di Desa Tambibendo Kecamatan Mojo, Kabupaten Kediri. Staf Pengajar di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Malang. Salah satu pendiri Pondok Pesantren Modern dan Perguruan Surya Buana Malang. Ketua Program Peningkatan Kualitas Guru Indonesia (Teachers Quality Improvement Program) Kerjasama PT Pertamina (Persero) – Universitas Negeri Malang (UM) mulai tahun 2010. Instruktur pelatihan guru Matematika di berbagai wilayah di Indonesia dari Sabang sampai Merauke. Koordinator Prodi S2 dan S3 Pendidikan Matematika Universitas Negeri Malang (UM) tahun 2012 – 2014. Salah satu pendiri dan sebagai Sekretaris Umum Asosiasi Pendidik dan Pengembang Pendidikan Indonesia (APPPI) mulai tahun 2015

Buku Teori Kesalahan Konstruksi Konsep dan Pemecahan Masalah Matematika ini memuat tujuh Bab:

Bab 1: Pengantar Teori Kesalahan Konstruksi
Membahas pentingnya kajian konstruksi konsep dalam belajar matematika, konstruksi pemecahan masalah matematika, berpikir dalam kerangka proses konstruksi, dan pentingnya mengaji kesalahan konstruksi konsep dan pemecahan masalah matematika.

Bab 2: Analisis Masalah dan Kerangka Konseptual Teori Kesalahan Konstruksi
Mengaji kedudukan teori konstruksi dalam proses terbentuknya kesalahan konsep dan pemecahan masalah matematika, serta membahas kerangka konseptual kesalahan konstruksi dan perumusan teori kesalahan konstruksi.

Bab 3: Metode Penelitian
Memuat proses pelaksanaan penelitian mulai dari desain penelitian, subjek dan tempat penelitian, pengembangan instrumen penelitian, prosedur pengumpulan data serta proses analisis data yang dilakukan.

Bab 4: Karakteristik Kesalahan Siswa dalam Mengonstruksi Konsep Matematika
Menggambarkan bentuk-bentuk kesalahan dan terjadinya kesalahan siswa dalam mengonstruksi konsep operasi bilangan, operasi bentuk aljabar, konsep geometri, dan konsep fungsi.

Bab 5: Teori Kesalahan Konstruksi
Menyajikan teori terkait dengan proses terjadinya kesalahan konstruksi konsep matematika: pseudo konstruksi, lubang konstruksi, mis-analogical construction, dan mis-logical construction.

Bab 6: Kesalahan Konstruksi dalam Pemecahan Masalah
Menggambarkan bentuk-bentuk terjadinya kesalahan konstruksi pemecahan masalah dan ketiadaan koneksi dalam pemecahan masalah.

Bab 7: Ringkasan dan Diskusi
Meringkas teori kesalahan konstruksi dan open problem yang memungkinkan untuk diteliti lebih lanjut.

ISBN 9789794957967
9 789794 957967
Anggota IKAPI No. 059/JTI/89