Dr. H. SUBANJI, M.Si.

TEORI DEFRAGMENTASI STRUKTUR BERPIKIR

DALAM MENGONSTRUKSI KONSEP DAN PEMECAHAN MASALAH MATEMATIKA

Penyunting: Prof. Dr. Toto Nusantara, M.Si.

Penerbit & Percetakan

TEORI DEFRAGMENTASI STRUKTUR BERPIKIR DALAM MENGONSTRUKSI KONSEP DAN PEMECAHAN MASALAH MATEMATIKA

TEORI DEFRAGMENTASI STRUKTUR BERPIKIR DALAM MENGONSTRUKSI KONSEP DAN PEMECAHAN MASALAH MATEMATIKA

Oleh

Dr. Subanji, M.Si

Penerbit & Percetakan

Universitas Negeri Malang
Anggota IKAPI No. 059/JTI/89
Jl. Semarang 5 (Jl. Gombong 1) Malang, Kode Pos 65145
Kotak Pos 13, MLG/IKIP Telp. (0341) 562391, 551312 psw. 453

Subanji
Teori Defragmentasi Struktur Berpikir Dalam Mengonstruksi Konsep Dan Pemecahan Masalah Matematika – Oleh: Subanji.– Cet. I– Universitas Negeri Malang, 2016.

x, 130 hlm; 23, 5 cm

ISBN: 978.979.495.875.9

Teori Defragmentasi Struktur Berpikir Dalam Mengonstruksi Konsep Dan Pemecahan Masalah Matematika
Dr. Subanji, M.Si

• **Universitas Negeri Malang (UM PRESS)**
Anggota IKAPI No. 059/JTI/89
Jl. Semarang 5 (Jl. Gombong 1) Malang, Kode Pos 65145
Kotak Pos 13, MLG/IKIP Telp. (0341) 562391, 551312 psw. 453

• Cetakan I : 2016

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah. Segala puji syukur ke hadirat Allah SWT, yang telah melimpahkan Rahmad dan Hidayah Nya, sehingga buku "**Teori Defragmentasi Struktur Berpikir Siswa dalam Mengonstruksi Konsep dan Memecahkan Masalah Matematika**" ini dapat diselesaikan.

Buku ini memuat enam Bab. Bab 1: Pengantar Teori Defragmentasi. Bab 2: Analsis Masalah dan Kerangka Konseptual Teori Defragmentasi Struktur Berpikir. Bab 3: Fragmentasi Struktur Berpikir Siswa Dalam Mengonstruksi Konsep Matematika. Bab 4: Teori Defragmentasi Struktur Berpikir Siswa dalam Mengonstruksi Konsep Matematika. Bab 5: Defragmentasi Struktur Berpikir Siswa dalam Pemecahan Masalah Matematika. Bab 6: Ringkasan dan Diskusi.

Buku Teori Defragmentasi Struktur Berpikir Siswa dalam Mengonstruksi Konsep dan Memecahkan Masalah Matematika ini bisa dijadikan sebagai referensi bagi peneliti terutama dosen, guru, dan mahasiswa yang menekuni penelitian kualitatif proses berpikir matematis. Penelitian proses berpikir dalam mengonstruksi dan memecahkan masalah matematika penting untuk terus dilakukan, karena akan sangat membantu untuk mengembangkan teori belajar matematika. Buku ini juga dapat dimanfaatkan sebagai salah satu referensi (sumber belajar) **Mata Kuliah Metodologi Penelitian Pendidikan Matematika.**

Kami menyadari bahwa kajian dalam buku ini masih sangat terbatas dan mungkin ada kekurangan-kekurangan yang tentunya perlu diperbaiki. Karena itu kami sangat mengharapkan adanya kritik dan saran dari semua pihak untuk perbaikan pada cetakan berikutnya.

Malang, 2016
Penulis

TEORI DEFRAGMENTASI STRUKTUR BERPIKIR SISWA DALAM MENGONSTRUKSI KONSEP DAN PEMECAHAN MASALAH MATEMATIKA

DAFTAR ISI

BAB I
PENGANTAR TEORI DEFRAGMENTASI

A. Belajar Matematika sebagai Proses Konstruksi

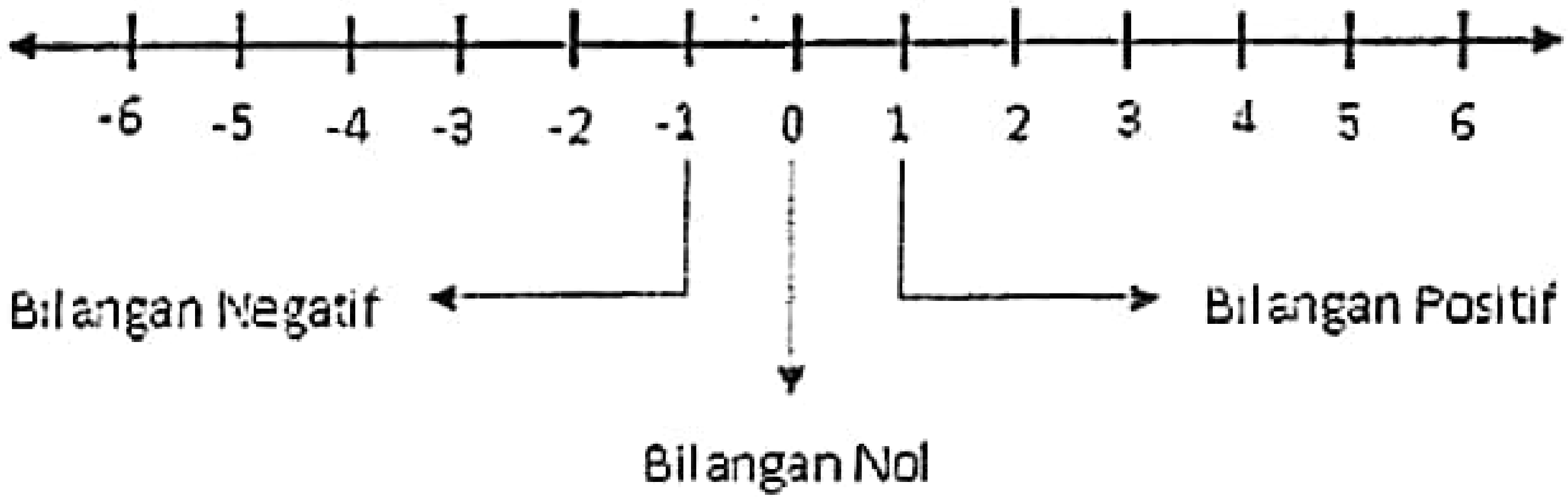
Pada dekade terakhir telah berkembang teori belajar yang mengacu pada pandangan konstruktivisme. Pandangan ini menekankan pada proses pembentukan atau perkembangan struktur kognitif siswa yang disebut sebagai skemata, yakni kumpulan dari skema-skema. Dalam proses belajar, sebagai individu aktif siswa selalu melakukan proses berpikir mengonstruksi pengetahuan baik secara mandiri maupun dalam proses belajar kelompok. Belajar terjadi secara terus menerus sepanjang waktu sehingga struktur kognitif siswa berkembang semakin kompleks.

Belajar matematika pada hakekatnya merupakan proses konstruksi pengetahuan yang ditandai dengan bertambah-nya skemata dalam pikiran siswa. Pengetahuan matematika terbentuk dengan mengaitkan suatu konsep matematika ke konsep matematika lainnya. Sebagai contoh, ketika mengonstruksi konsep operasi bilangan, siswa harus mengenal terlebih dahulu konsep bilangan. Begitupula dalam mengonstruksi konsep bilangan, proses belajar siswa dimulai dari mengenal fakta-fakta yang ada dalam kehidupannya. Proses ini berlangsung dari konsep sederhana menuju konsep yang lebih kompleks dan berlangsung sepanjang kehidupannya.

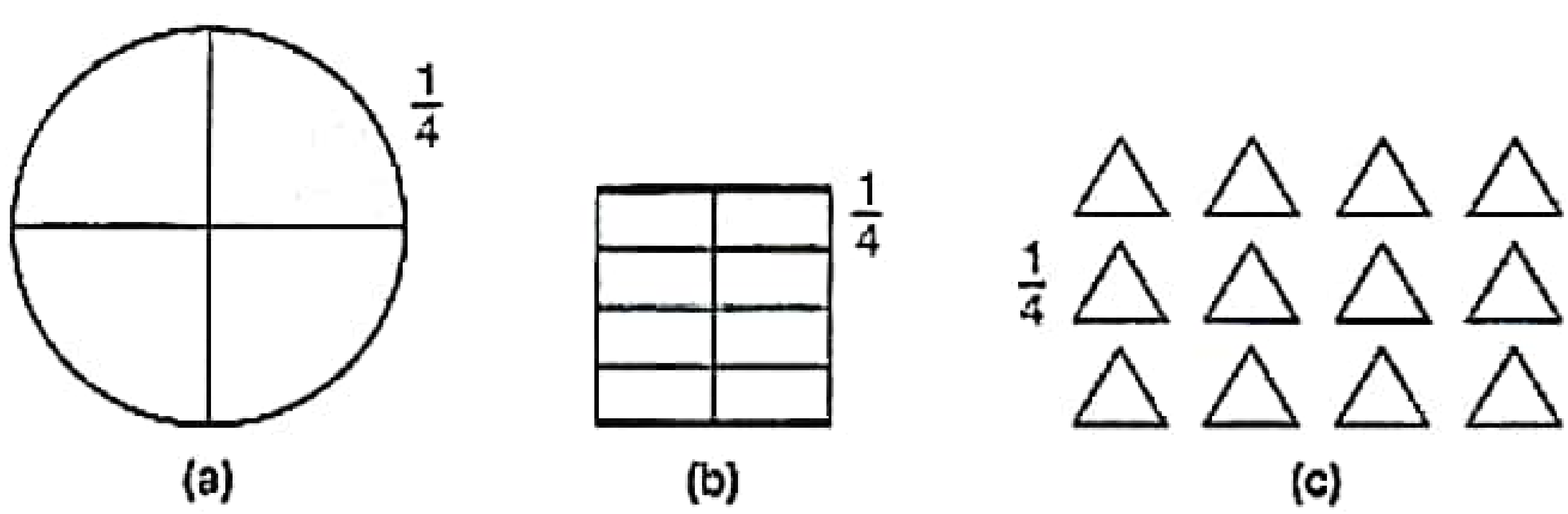
Pada konstruksi konsep bilangan awal, seorang anak mulai bisa menghitung atau membilang suatu objek. Sekumpulan objek bisa dihitung banyaknya mulai dari satu, dua, tiga, dan seterusnya. Proses membilang menghasilkan konsep bilangan yang adanya di dalam otak siswa. Dari konsep bilangan di dalam otak, selanjutnya direpresentasikan dengan simbol angka 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, dan 9. Konsep membilang berkembang, ketika objeknya ada bisa dibilang satu, dua, tiga, dan seterusnya. Selanjutnya timbul pertanyaan "bagaimana kalau objeknya tidak ada? Harus disimbuli apa?", maka muncul konsep bilangan nol yang disimbolkan dengan angka 0, yang merepresentasikan ketiadaan objek.

Perkembangan berikutnya terjadi ketika membilangnya sudah lebih dari sembilan, misalnya sepuluh, sebelas, dua belas, dan seterusnya, proses konstruksi siswa bisa berlanjut dengan memikirkan lambang atau simbol yang bisa digunakan untuk menuliskan bilangan sepuluh, sebelas, dua belas, dan seterusnya. Dalam hal ini "sepuluh" bisa diinterpretasi sebagai "satu puluh" ditulis dengan lambang 10 (angka 1 dan 0), "sebelas" diinterpreasi sebagai "satu belas" dilambangkan dengan 11 (angka 1 dan 1), "duabelas" dilambangkan dengan 12 (angka 1 dan 2), dan seterusnya. Jadi konsep bilangan hanya ada di pikiran, seperti bilangan dua belas (12) adanya di dalam pikiran, sedangkan perwujudannya dilambangkan dengan angka 1 dan angka 2 (atau ditulis 12).

Konsep bilangan ini terus berkembang dan berlanjut dengan menggunakan pola. Ketika seseorang membilang "mundur satu" misalnya dari lima, lanjut empat, tiga, dua, satu dan **mestinya bisa mundur lagi**, maka muncul konsep bilangan nol dan bilangan negatif: -1, -2, -3, dan seterusnya. Bilangan-bilangan tersebut bisa digambarkan dalam garis bilangan seperti berikut.

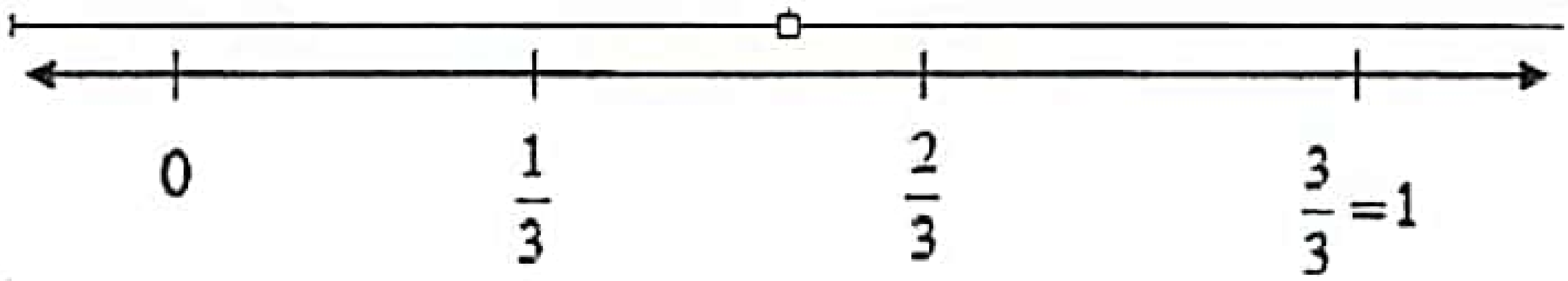


Konstruksi konsep bilangan berkembang lagi, ketika berpikir tentang objek yang kondisinya tidak mesti utuh, bisa dikonstruksi konsep "bagian dari keseluruhan". Misalnya objek yang hanya setengah bagian, sepertiga bagian, satu setengah bagian, dan seterusnya. Ketika objek utuh berupa lingkaran, maka ada konsep "seperempat bagian" dari lingkaran (Gambar 1.1 a), ketika objek utuh berupa persegi panjang, maka ada konsep seperempat dari persegi panjang (Gambar 1.1 b), dan ketika ada sekumpulan objek sebanyak 12 segitiga, maka ada konsep seperempat (3 segitiga) dari 12 objek segitiga. Konsep "seperempat" diabstraksi menjadi lebih umum, menyatakan satu bagian (bisa sekelompok) dari empat bagian (empat kelompok) **yang sama.**



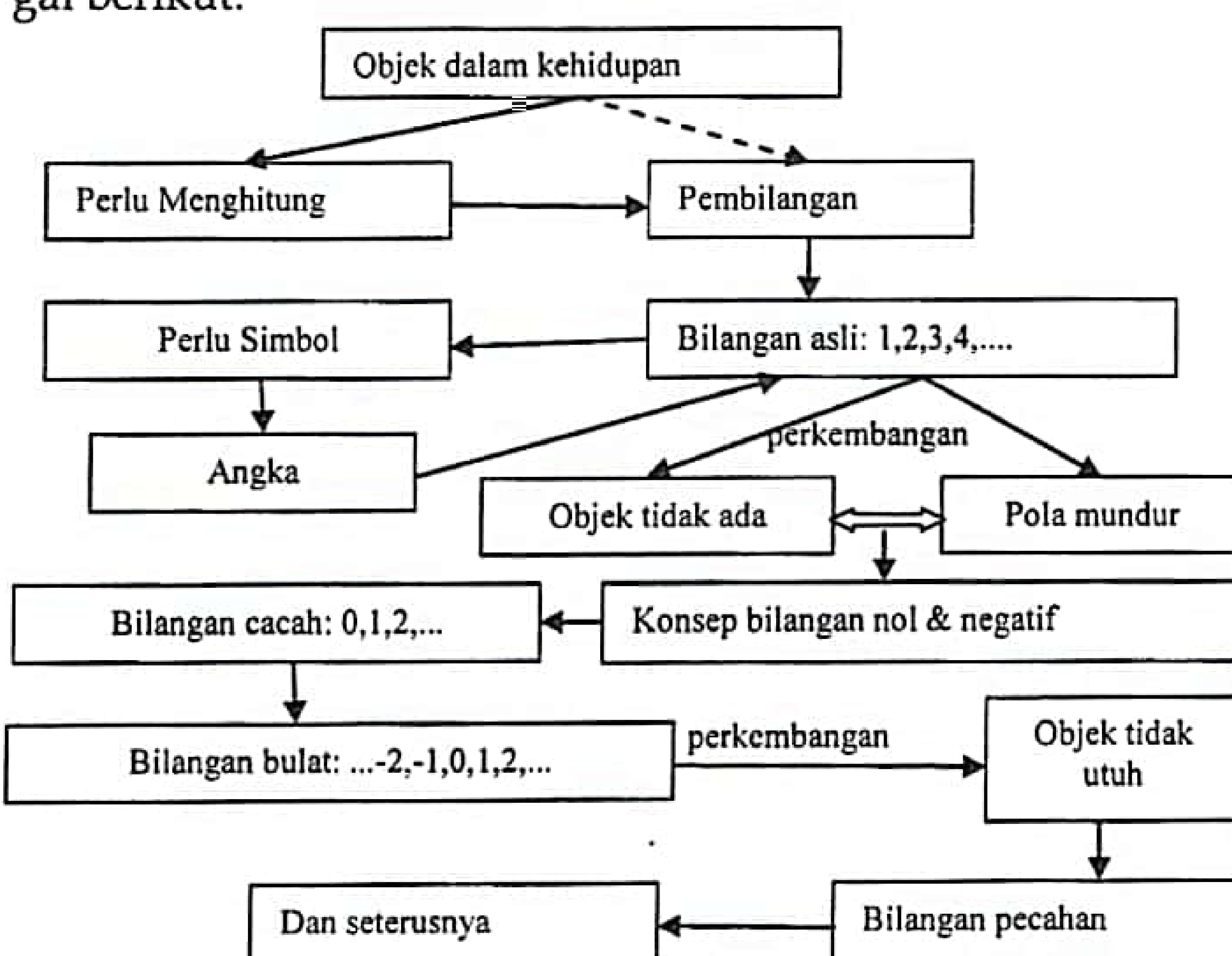
Gambar 1.1 Konstruksi Konsep Seperempat

Konsep bilangan pecahan juga terkait dengan berkembangnya garis bilangan, bahwa diantara 0 dan 1 mestinya ada bilangan yang bisa merepresentasikan objek yang tidak utuh (bagian dari keseluruhan). Dari 0 ke 1, bisa dianggap sebagai satu satuan (keseluruhan yang utuh), sehingga bisa dikonstruksi perbagiannya, bisa sepertiga bagiannya, setengah bagiannya, dua pertiga bagiannya, dan seterusnya seperti gambar berikut.

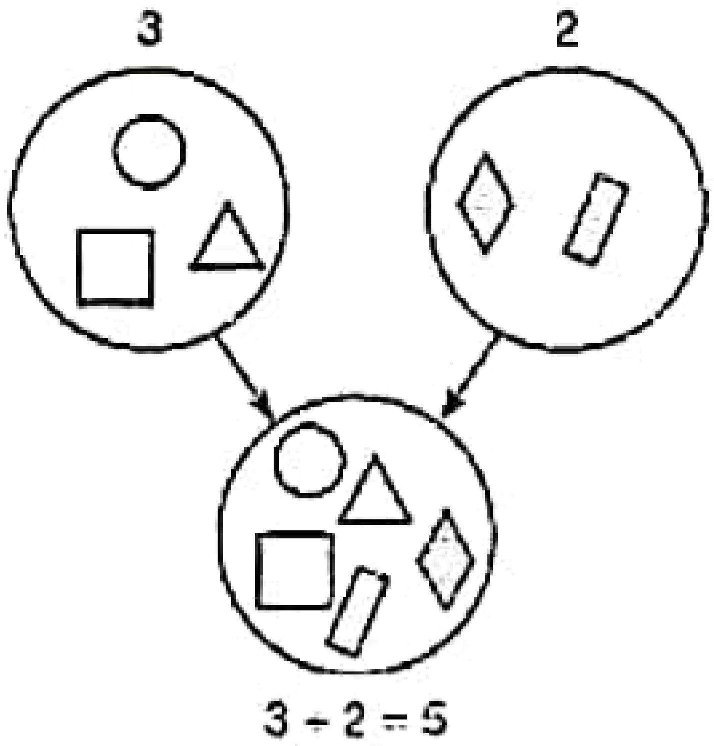


Perkembangan tersebut akhirnya memunculkan konsep bilangan pecahan. Bilangkan pecahan bisa diberi pengertian sebagai bilangan yang dapat dibentuk dalam $\frac{a}{b}$ *dengan* a, b *bilangan bulat dan* $b \neq 0$ (Musser, dkk, 2011). Untuk bilangan pecahan positif, jika $0 < a < b$, maka $\frac{a}{b}$ disebut *pecahan murni (proper fractions)*. Jika $a > b > 0$, maka $\frac{a}{b}$ disebut *pecahan tidak murni (improper fraction)*. Jika *a* kelipatan dari *b*, maka $\frac{a}{b}$ pecahan sekaligus bilangan bulat.

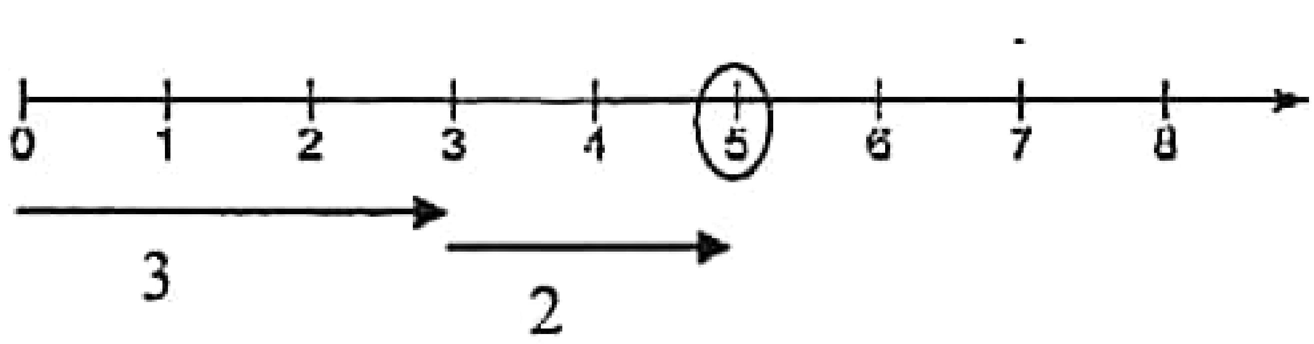
Konstruksi konsep bilangan dapat digambarkan sebagai berikut.



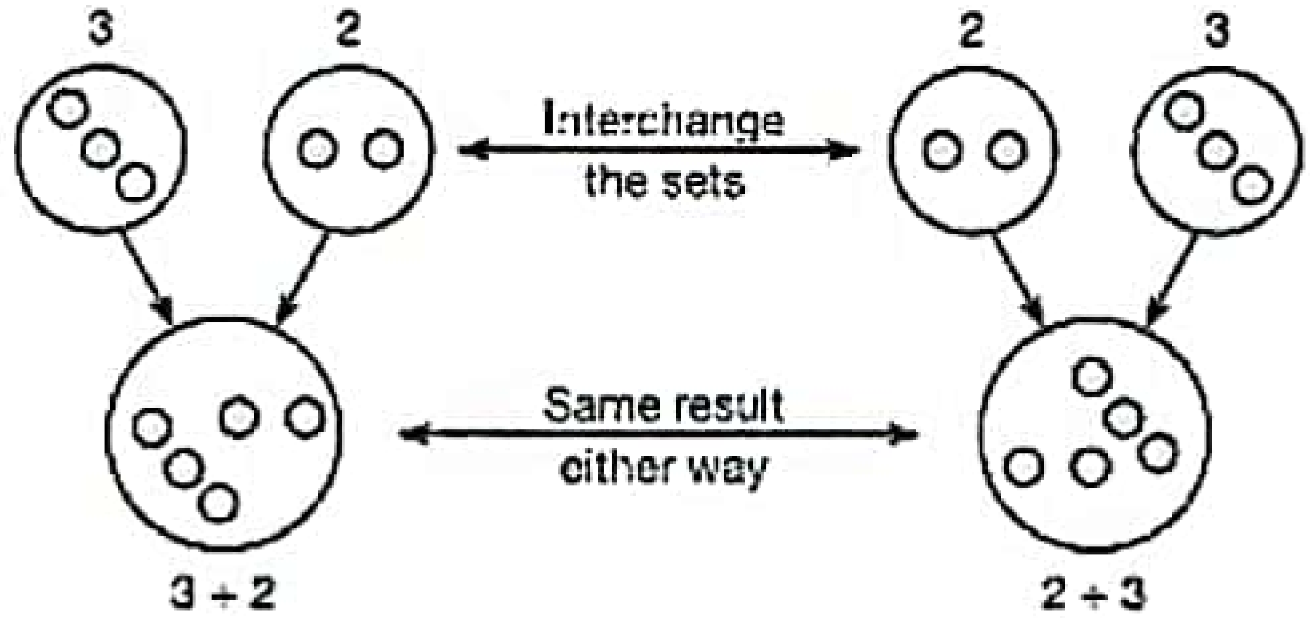
Konstruksi bilangan tidak terlepas dari proses konstruksi operasi bilangan. Operasi bilangan diawali dengan penggabungan beberapa kelompok objek. Ilustrasi berikut sebagai salah satu bentuk representasi operasi bilangan sederhana berdasarkan penggabungan dua kelompok objek.



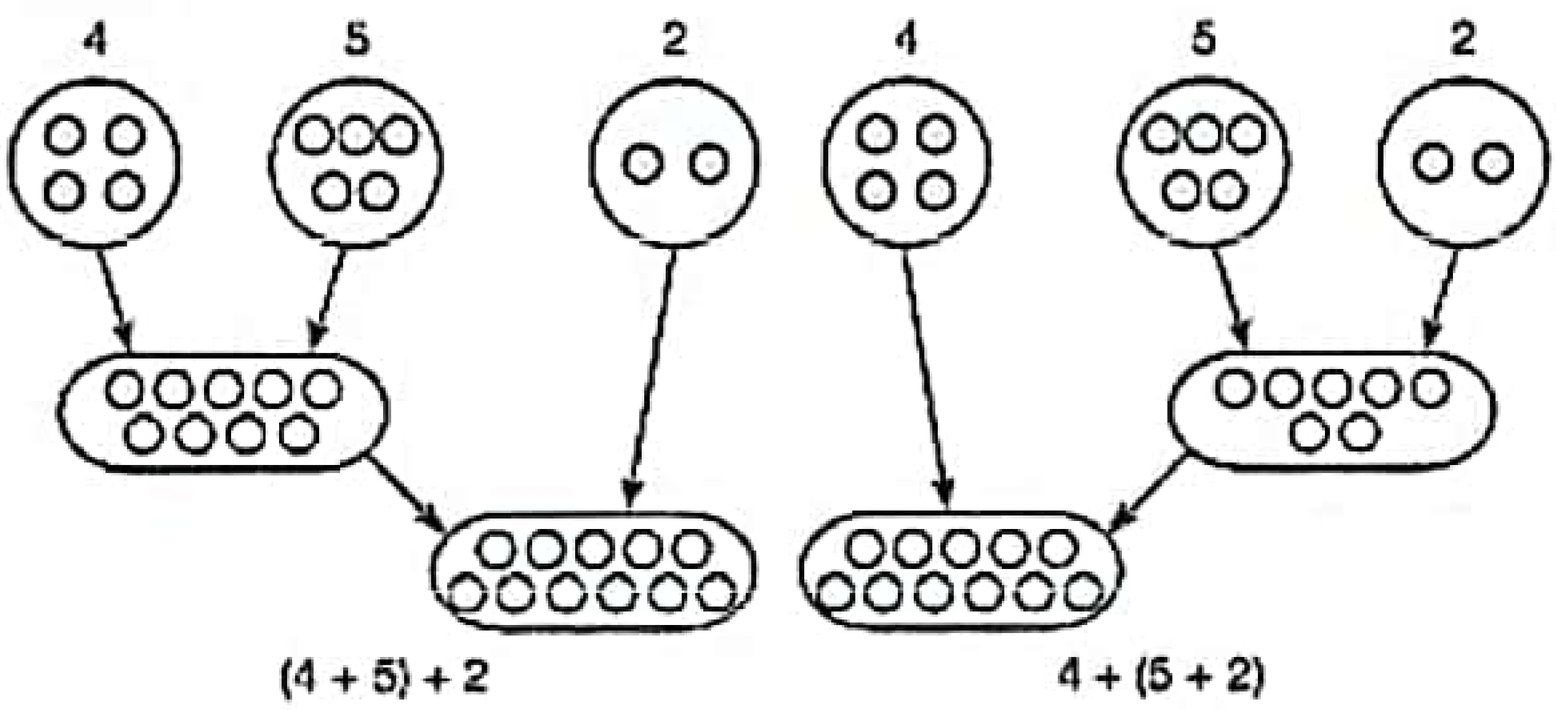
Misalkan terdapat dua kumpulan objek (bangun datar). Kumpulan pertama terdiri dari tiga bangun datar (lingkaran, persegi, dan segitiga). Kumpulan kedua terdiri dari dua bangun datar (persegi panjang dan belah ketupat). Apabila dua kumpulan objek tersebut digabungkan maka ada lima bangun datar (lingkaran, persegi, segitiga, persegi panjang dan belah ketupat). Proses penggabungan dua kumpulan objek tersebut dapat direpresentasikan dalam bentuk penjumlahan bilangan 3 + 2 = 5. Penjumlahan bilangan tersebut berkembang melalui garis bilangan.



Penjumlahan bilangan berkembang sehingga memunculkan sifat-sifat, antara lain komutatif dan asosiatif (Musser, Burger, Peterson, 2011).

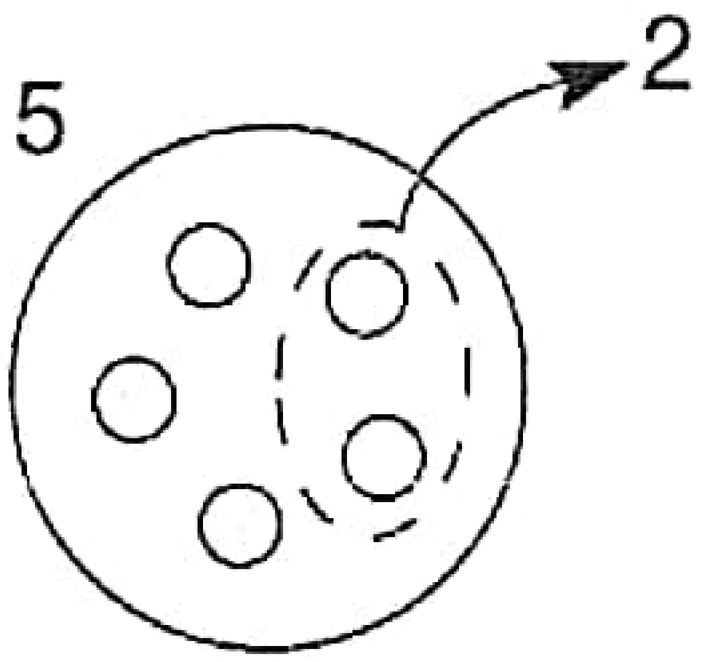


Penjumlahan 3 + 2 akan sama dengan 2 + 3 dan ditulis 3 + 2 = 2 + 3. Konsep operasi bilangan ini berkembang untuk bilangan bulat. Secara umum bila *a* dan *b* bilangan cacah, maka $a + b = b + a$. Selanjutnya berkembang sifat asosiatif, bahwa untuk menggabungkan tiga kumpulan objek dapat dilakukan dengan menggabungkan 2 kumpulan objek dilanjutkan dengan menggabungkan dengan kumpulan objek yang lain.

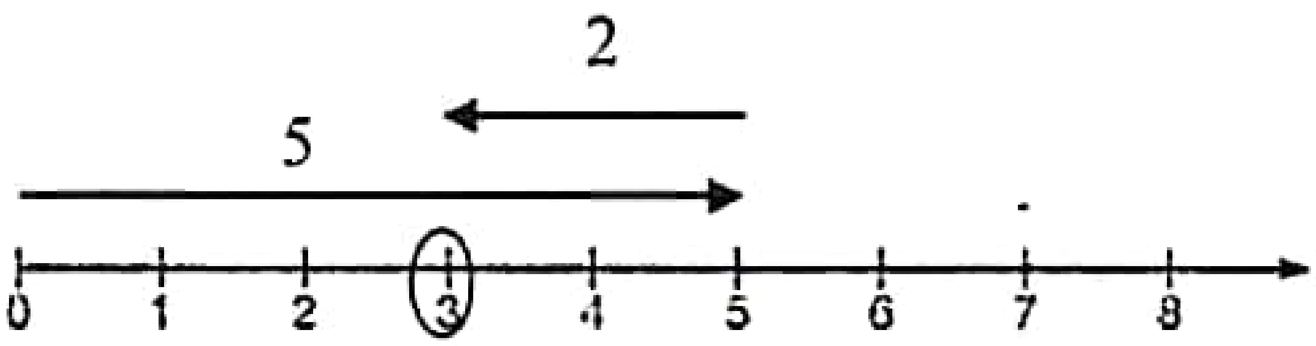


Dalam hal ini 4 ditambah terlebih dahulu dengan 5 dan dilanjutkan menjumlahkan dengan 2 **hasilnya akan sama** dengan menjumlahkan terlebih dahulu 5 dengan 2 dan dilanjutkan menjumlahkan dengan 4. Biasa ditulis (4 + 5) + 2 = 4 + (5 + 2). Secara umum jika *a*, *b*, dan *c* bilangan cacah, maka $(a+b) + c = a + (b+c)$.

Konstruksi konsep operasi bilangan berkembang pada masalah pengurangan. Konstruksi konsep pengurangan berkembang dari hal sederhana, misalkan *Adi memiliki 5 buah jeruk dan diambil dua jeruk untuk dimakan, berapa sisa buah jeruk Adi?* Kejadian tersebut dapat direpresentasikan dengan gambar sebagai berikut.

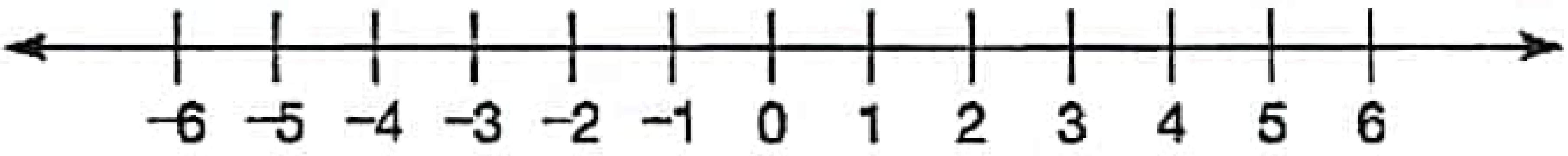


Jeruk yang dimiliki oleh Adi adalah 5 buah dan diambil 2 jeruk, maka sisanya 3 jeruk. Hal ini dapat dituliskan 5 - 2 = 3. Pengurangan tersebut juga dapat direpresentasikan dengan garis bilangan.

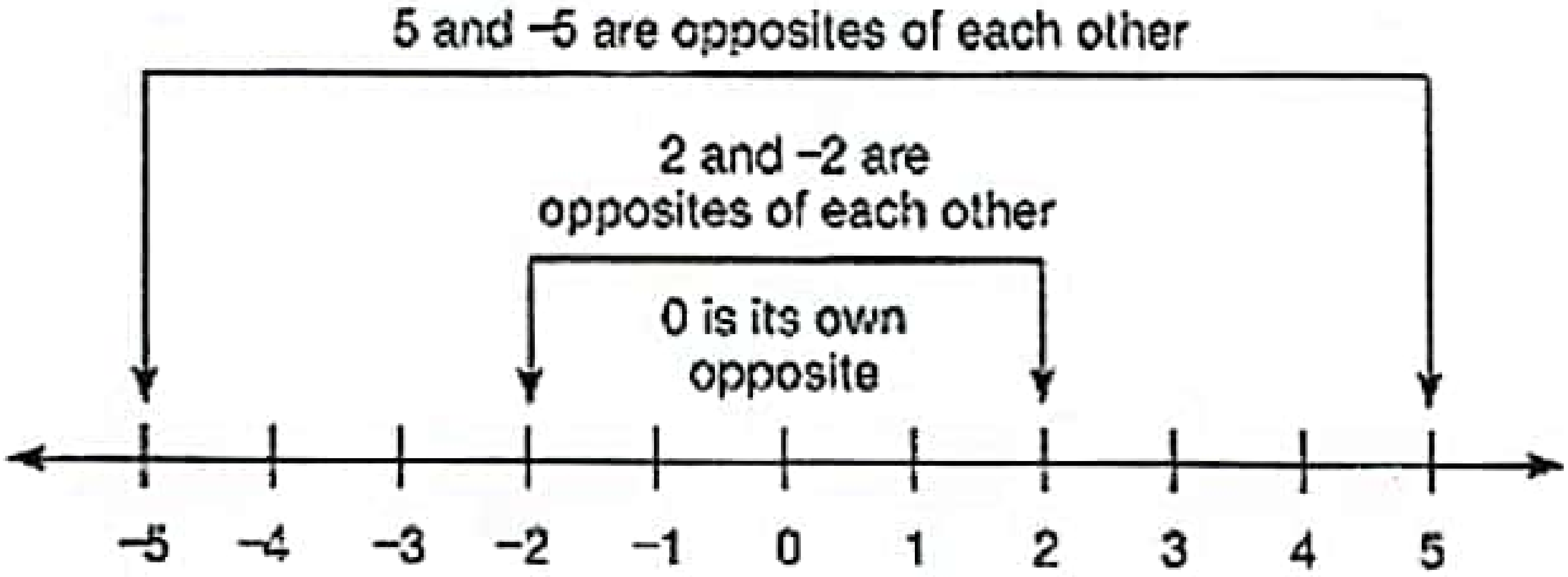


Bilangan 5 pada garis bilangan menyatakan pergeseran dari nol ke kanan sejauh 5 langkah dan bilangan 2 arah ke kiri merepresentasikan pengurangan (pergeseran) dari 5 sebanyak 2 langkah. Hasilnya adalah posisi terakhir pergeseran, yakni 3. Hal ini dapat ditulis 5 – 2 = 3.

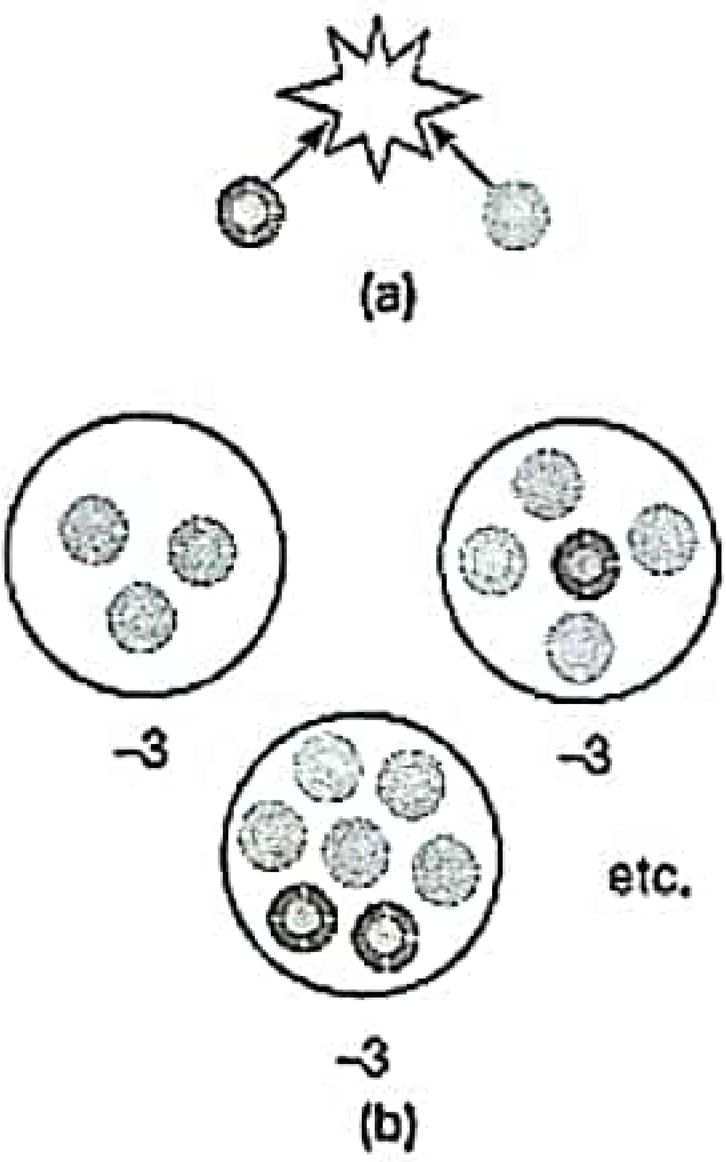
Konstruksi operasi penjumlahan dan pengurangan untuk bilangan cacah masih mudah diilustrasikan dari kejadian dalam kehidupan, namun operasi ini menjadi semakin kompleks ketika yang dioperasikan adalah bilangan bulat khusunya bilangan negatif, karena tidak bisa direpresentasikan dengan objek. Karena itu garis bilangan menjadi alternatif dalam pengembangan operasi bilangan.



Konstruksi operasi bilangan bulat, terlebih dahulu perlu dikonstruksi konsep bilangan negatif. Musser, Burger, Peterson (2011) menjelaskan bahwa bilangan negatif sebagai lawan dari bilangan positif dan sebaliknya.

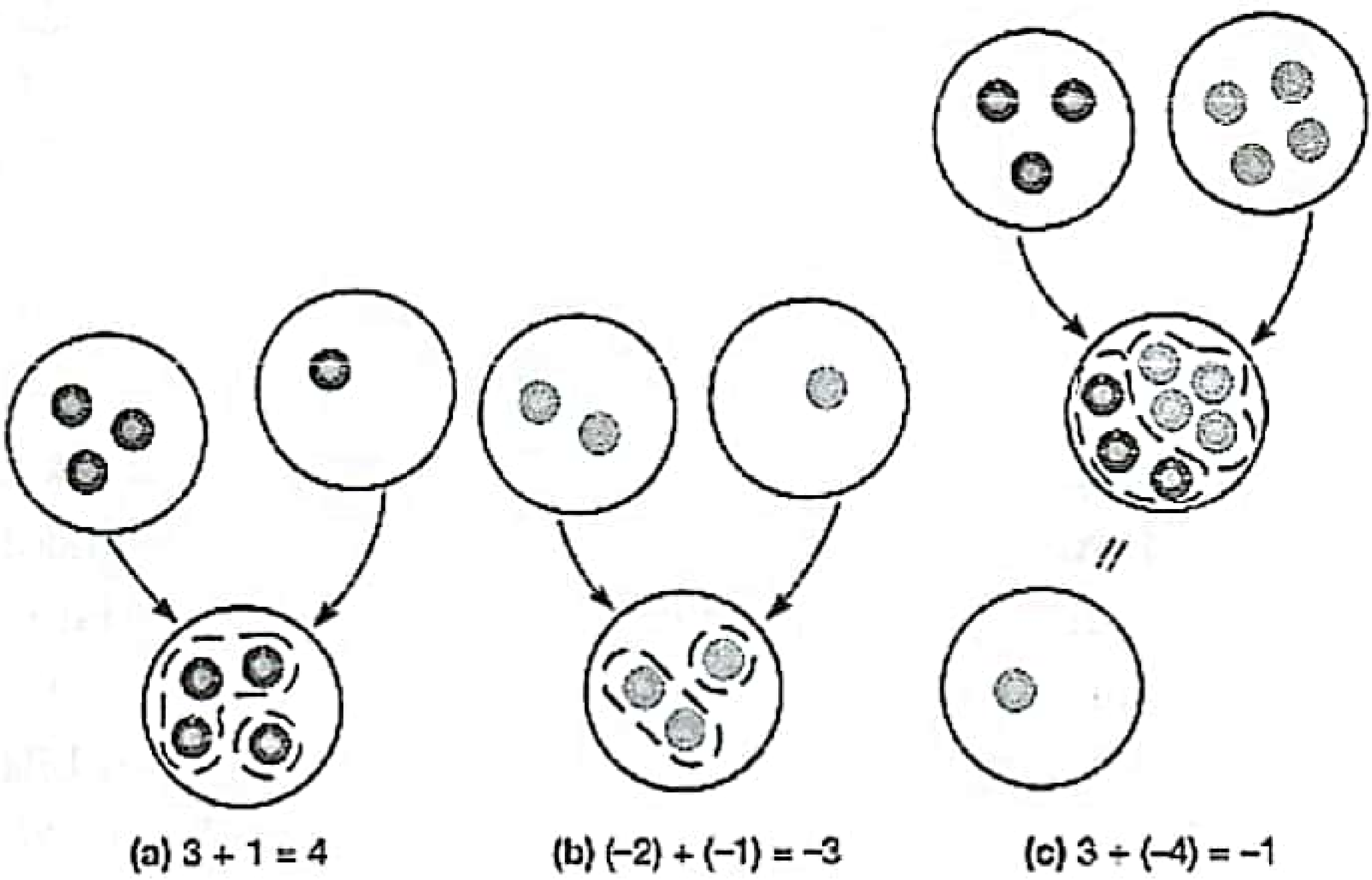


Bilangan 0 lawannya 0 sendiri, bilangan 2 lawannya -2, bilangan 5 lawannya -5, dan sebagainya. Dalam hal ini 0 bisa direpresentasikan sebagai 1 + (-1), 2 + (-2), 3 + (-3), dan sebagainya. Konsekuensinya adalah 3 bisa direpresentasikan sebagai 5 + (-2), karena 5 + (-2) = 3 + 2 + (-2) = 3. Begitupula -3 bisa direpresentasikan dengan –5 + 2, karena -5 + 2 = -3 + (-2) + 2 = -3.



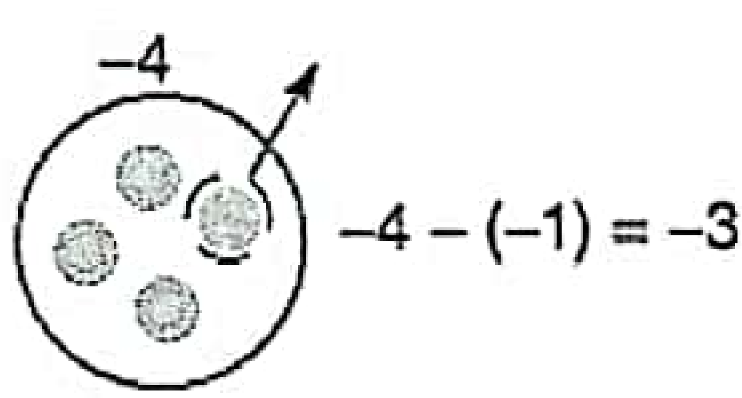
Menurut Musser, Burger, dan Peterson (2011), konstruksi operasi bilangan bulat akan lebih mudah dilakukan dengan menggunakan ilustrasi objek berikut

Bilangan 0 dapat diilustrasikan sebagai pasangan bola hitam dan bola merah. Bola hitam sebagai lawan dari bola merah. Negatif 3 (-3) dapat diilustrasikan sebagai tiga bola·merah, juga dapat diilustrasikan sebagai 4 bola merah dan satu bola hitam atau ditulis -4 + 1, atau 5 bola merah dan dua bola hitam atau ditulis -5 + 2, dan sebagainya. Dengan menggunakan model objek "benda" tersebut, konstruksi operasi penjumlahan bilangan bulat akan mudah dilakukan, seperti 3 + 1 = 4, (-2) + (-1) = -3, 3 + (-4) = 1, seperti ilustrasi berikut.

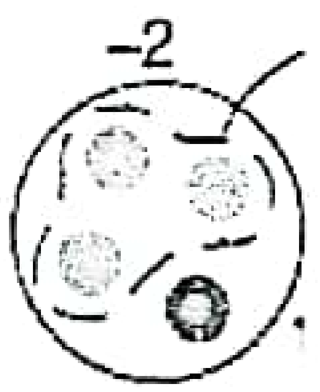


Gambar 1.2 Ilustrasi Penjumlahan Bilangan Bulat

Selanjutnya konstruksi operasi pengurangan bilangan bulat juga dapat dilakukan dengan menggunakan objek. Misalkan -4 - (-1) dapat diilustrasikan dengan bilangan negatif sebagai bola merah sebanyak 4 dan diambil satu bola merah (-1) sehingga sisanya bola merah sebanyak 3 (berarti -3) atau ditulis -4 - (-1) = -3



Proses tersebut juga dapat dilakukan dalam operasi pengurangan -2 – (-3). Bilangan negatif 2 diilustrasikan dengan bola merah sebanyak 2 dan akan dikurangi dengan bola merah sebanyak 3. Hal ini belum bisa dilakukan, karena hanya ada 2 bola merah sementara akan dikurangi 3 bola merah. Karena itu, perlu proses mengilustrasikan -2 sebagai bentuk lain yang memuat tiga bola merah (-3). Dalam hal ini -2 bisa diilustrasikan yang setara dengan 3 bola merah dan satu bola hitam.



Dengan mengilustrasikan -2 sebagai 3 bola merah dan satu bola hitam, maka pengambilan 3 bola merah dapat dilakukan dan akhirnya diperoleh sisanya satu bola hitam. Hal ini menunjukkan bahwa -2 – (-3) = 1.

Perkembangannya konsep operasi pengurangan bilangan bulat dapat dilakukan dengan menggunakan pola.

$5 - 2 = 3$ tambah 1

$5 - 1 = 4$ tambah 1

$5 - 0 = 5$

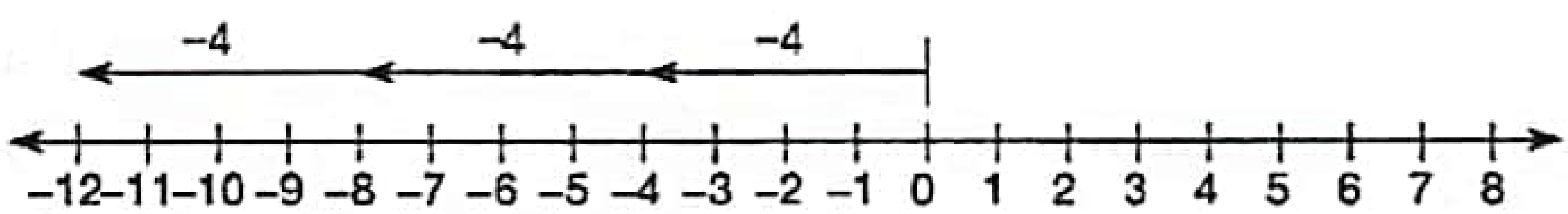
$5 - (-1) = \ldots$ mestinya juga tambah 1

$5 - (-2) = \ldots$ mestinya juga tambah 1

Dengan pola tersebut, diperoleh 4 - (-1) = 5 dan 4 - (-2) = 6. Hal ini berarti bahwa dikurangi dengan suatu bilangan sama dengan ditambah dengan lawannya. Dalam kasus lain, pengurangan -2 - (-3) juga dapat dilakukan dengan -2 – (-3) = -2 + 3 = 1.

Konstruksi konsep saling terkait antara satu konsep dengan konsep lainnya. Konsep penjumlahan dan perkalian dikembangkan menjadi konsep perkalian. Penggabungan kumpulan objek sama yang jumlahnya banyak dapat dikonstruksi menjadi konsep perkalian. Dalam hal ini penjumlahan berulang dikonstruksi sebagai konsep perkalian. Misalnya 4+4+4+4+4 dikonstruksi sebagai 5 x 4, artinya 4 muncul lima kali dalam penjumlahan atau biasa ditulis 4+4+4+4+4 = 5 x 4. Hal ini juga berarti 5 x 4 = 4 + 4 + 4 + 4+ 4. Timbul pertanyaan, apakah 5 x 4 bisa diartikan sebagai 5 + 5 + 5 + 5? Hasil dari 5 x 4 sama dengan 4 x 5, namun akan timbul permasalahan ketika diaplikasikan dalam kehidupan. Sebagai contoh, dalam resep dokter yang tertulis 3 x 1 diartikan pagi satu, siang satu, dan malam satu atau 3 x 1 = 1 (pagi) + 1 (siang) + 1 (malam). Begitupula resep dokter 3 x 2 diartikan sebagai pagi 2, siang 2, dan malam 2 atau bisa ditulis 3 x 2 = 2 (pagi) + 2 (siang) + 2 (malam). Kesalahan mengartikan makna 3 x 1 (dalam resep dokter) atau 3 x 2 (dalam resep dokter) akan berakibat fatal.

Konstruksi konsep perkalian bilangan berkembang pada bilangan bulat, 3 x (-4) bisa diartikan sebagai -4 + (-4) + (-4) = -12 dan dapat digambarkan menggunakan garis bilangan sebagai berikut.



Konstruksi konsep perkalian bilangan bulat juga dapat dilakukan dengan menggunakan pola.

$$
\begin{array}{l}
3 \times 4 = 12 \\
3 \times 3 = 9 \\
3 \times 2 = 6 \\
3 \times 1 = 3 \\
3 \times 0 = 0 \\
3 \times (-1) = ? \\
3 \times (-2) = ? \\
3 \times (-3) = ? \\
3 \times (-4) = ?
\end{array}
$$

Berkurang 3
Berkurang 3
Berkurang 3
Berkurang 3
Mestinya juga berkurang 3
Mestinya juga berkurang 3
Mestinya juga berkurang 3

Dari pola tersebut dapat diperoleh 3 x (-1) = -3; 3 x (-2) = 6; 3 x (-3) = -9; 3 x (-4) = -12. Dalam perkalian juga berlaku hukum komutatif, bahwa 3 x 2 = 2 x 3; 2 x (-3) = (-3) x 2; dan seterusnya. Dengan demikian dapat dikembangkan pola sebagai berikut.

$$
\begin{array}{l}
(-3) \times 3 = -9 \\
(-3) \times 2 = -6 \\
(-3) \times 1 = -3 \\
(-3) \times 0 = 0 \\
(-3) \times (-1) = ? \\
(-3) \times (-2) = ? \\
(-3) \times (-3) = ?
\end{array}
$$

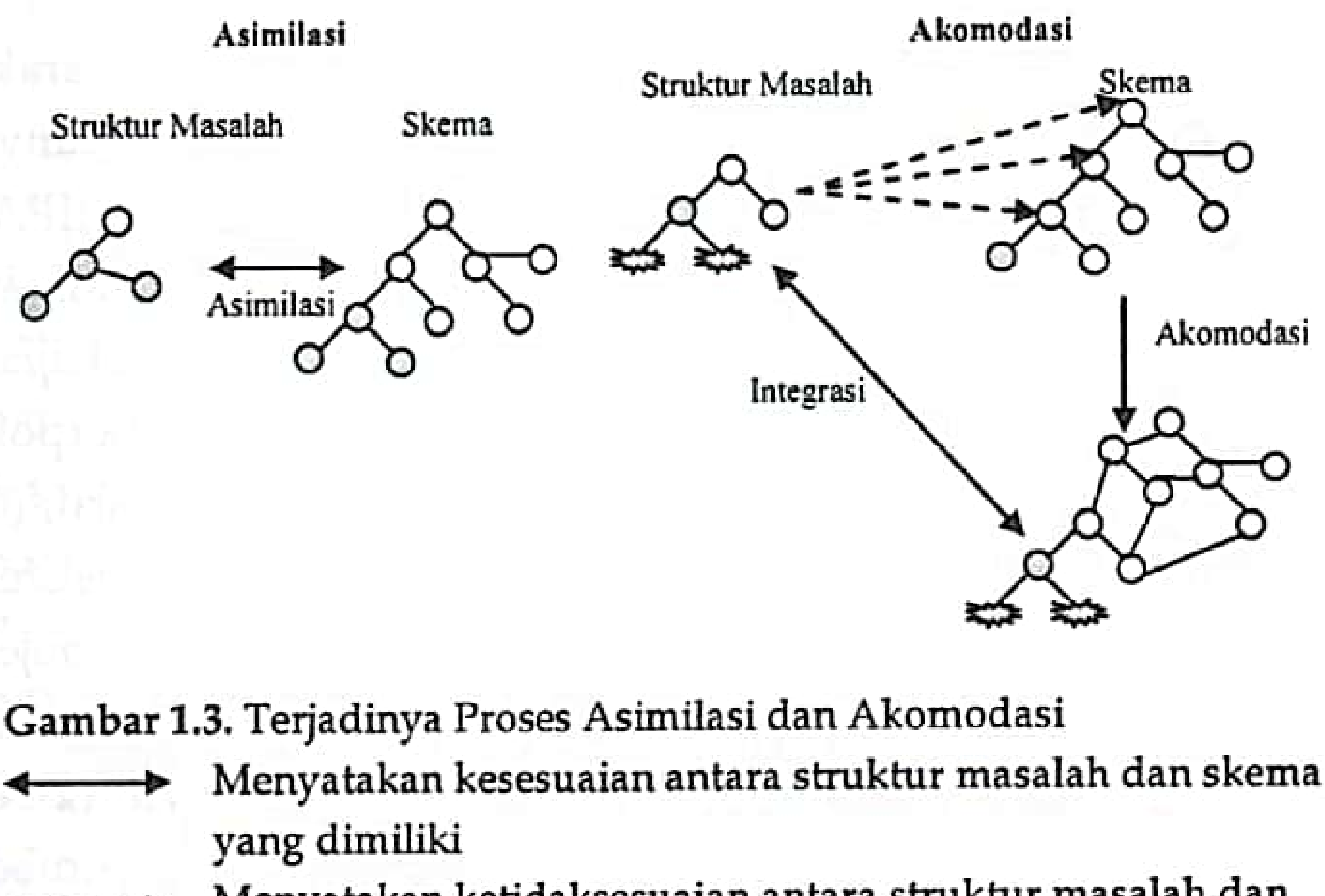
Beratmbah 3
Bertambah 3
Bertambah 3
Bertambah 3
Mestinya juga bertambah 3
Mestinya juga bertambah 3

Berdasarkan pola tersebut, diperoleh (-3) x (-1) = 3; (-3) x (-2) = 6; dan (-3) x (-3) = 9.

Belajar matematika sebagai proses konstruksi berkesinambungan. Menurut Piaget (Subanji, 2013) menyatakan bahwa struktur kognitif sebagai suatu skemata (schemas), yaitu kumpulan dari skema-skema. Seorang individu dapat mengikat, memahami, dan memberikan respon terhadap stimulus disebabkan karena bekerjanya skemata ini. Skemata berkembang secara kronologis, sebagai hasil interaksi antara individu dan lingkungannya. Dengan demikian seorang individu memiliki struktur kognitif yang lebih lengkap dibandingkan ketika ia masih kecil. Perkembangan skemata berlangsung seiring dengan proses belajar secara terus menerus dan sebagai respon dalam menghadapi tantangan (masalah).

Seorang individu selalu melakukan proses adaptasi dengan lingkungannya. Adaptasi terjadi dalam dua proses, yakni asimilasi dan akomodasi. Menurut Piaget (Subanji, 2011), *assimilation is the incorporation of new events into intelligence as a scheme or concept.* Asimilasi merupakan proses pengintegrasian secara langsung stimulus baru ke dalam skemata yang telah terbentuk. Sedangkan akomodasi merupakan proses pengintegrasian stimulus baru melalui proses pengubahan atau pembentukan skemata baru untuk menyesuaikan dengan stimulus yang ada. *Accommodation, existing schemes are modified to account for new information.*

Subanji (2007) memperjelas proses asimilasi dan akomodasi dengan mengilustrasikan dalam bentuk diagram seperti Gambar 1.3.



Gambar 1.3. Terjadinya Proses Asimilasi dan Akomodasi

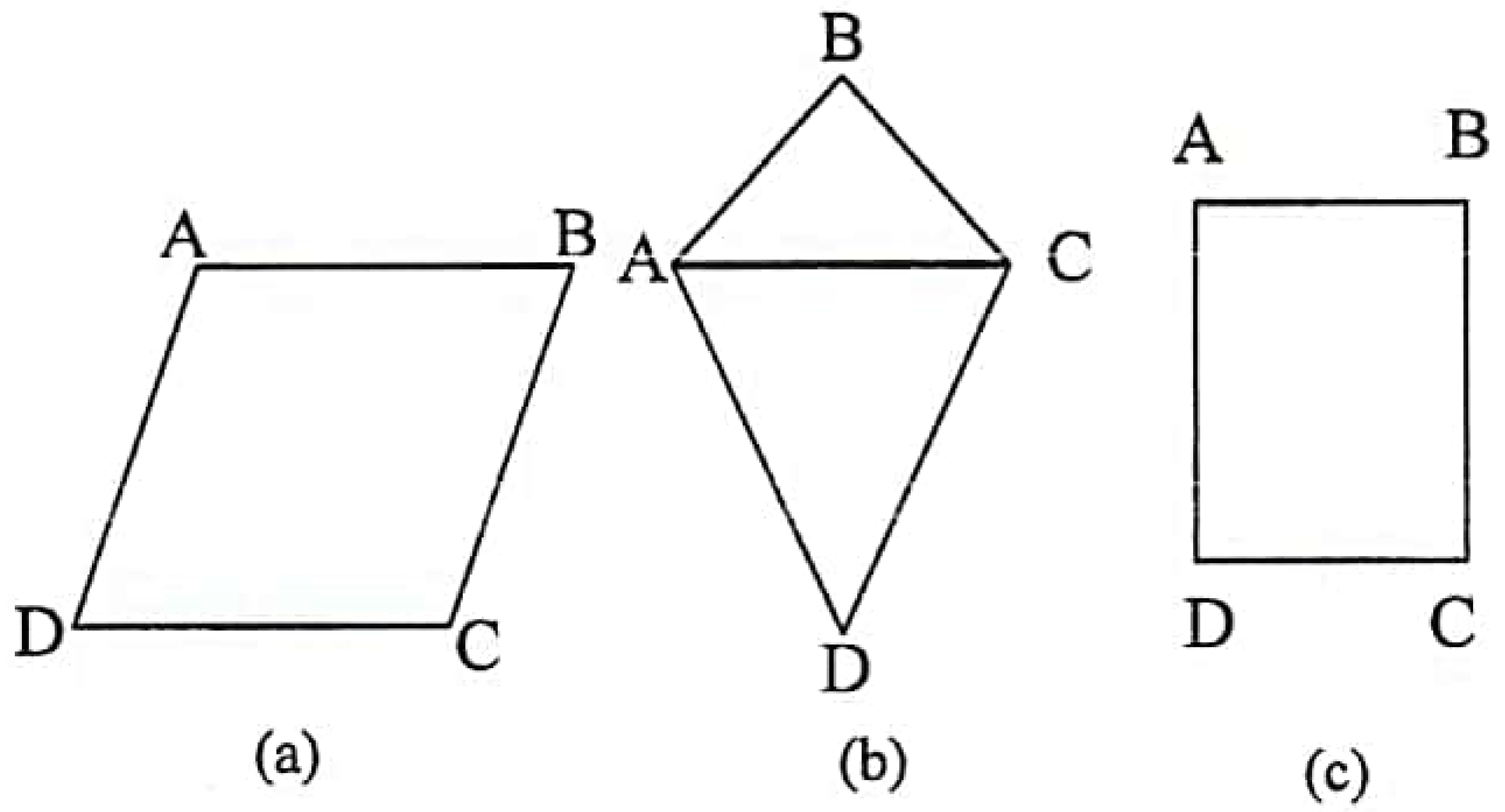
←→ Menyatakan kesesuaian antara struktur masalah dan skema yang dimiliki

- - - -► Menyatakan ketidaksesuaian antara struktur masalah dan skema yang dimiliki

Dalam proses mengonstruksi, asimilasi dan akomodasi senantiasa berlangsung selama proses belajar siswa. Bagaimana siswa mengonstruksi pengetahuan, menjadi hal penting dalam teori belajar. Salah satu pandangan tentang bagaimana siswa belajar, khususnya mengonstruksi pengetahuan adalah *Teori Konstruktivisme*. Konstruktivisme merupakan sebuah teori yang mempelajari bagaimana seseorang belajar. Teori ini lebih memandang bagaimana belajar itu berlangsung. Suatau saat siswa bisa secara optimal mengonstruksi pengetahuan (disebut siswa konstruktif), pada saat yang lain tidak konstruktif. Karena itu belajar hafalanpun juga merupakan sebuah konstruksi (Subanji, 2013), tetapi "konstruksi yang lemah". Konstruksi lemah nampak sekali dari perilaku siswa yang mudah lupa dalam belajar dan tidak bisa memanfaatkan materi yang dipelajari untuk memecahkan masalah. Dalam hal ini yang diingat oleh siswa hanya prosedur menyelesaikan soal, ketika soal diubah (meskipun sedikit) siswa sudah tidak mampu menyelesaikannya.

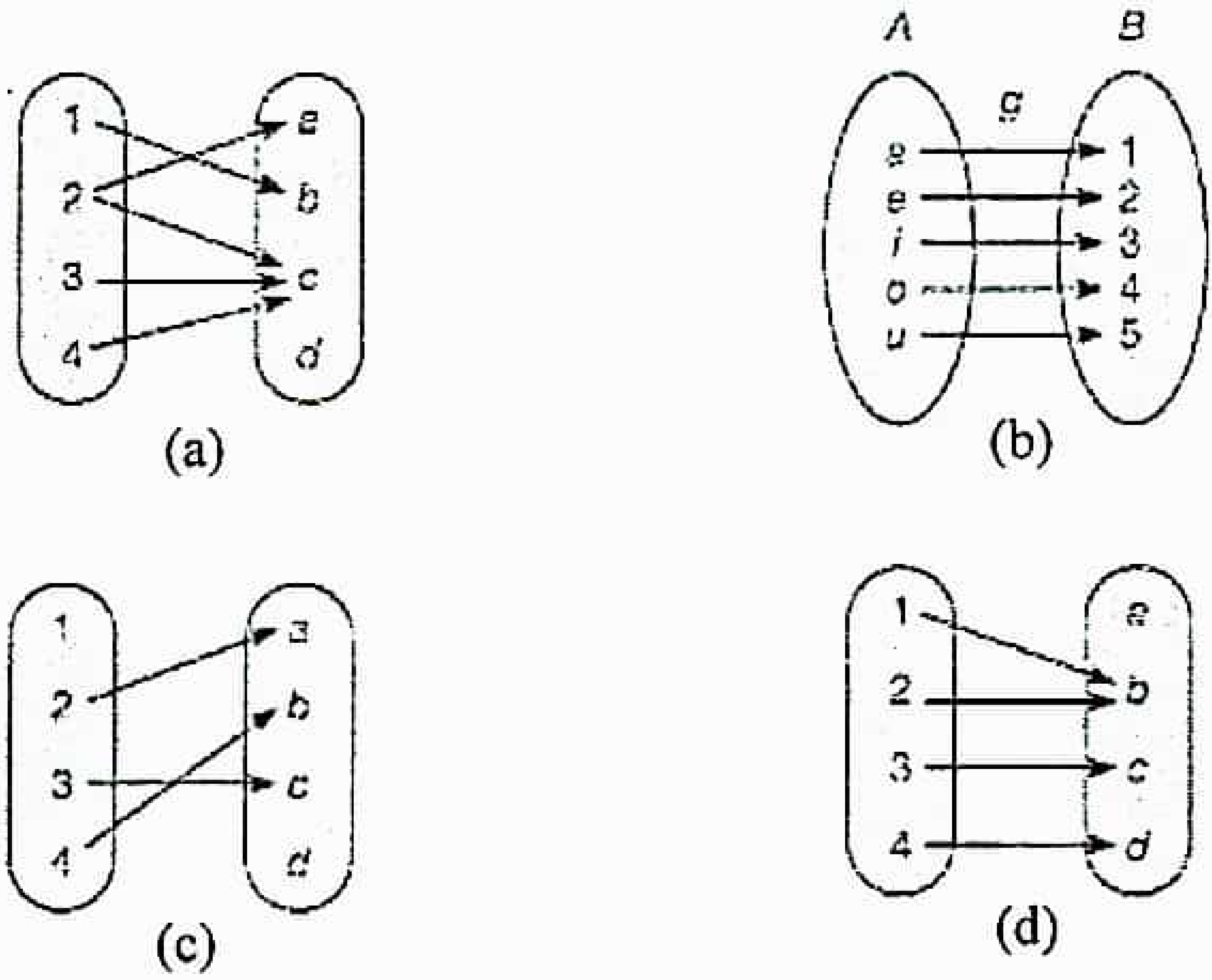
Proses belajar siswa sangat dipengaruhi oleh karakteristik materi yang dipelajari. Belajar matematika tentunya akan berbeda dengan belajar ilmu pengetahuan alam (IPA) atau bahasa. Matematika merupakan ilmu pengetahuan yang memiliki karakteristik khusus: (1) memiliki objek kajian yang abstrak; (2) bertumpu pada kesepakatan; (3) berpola pikir deduktif; (4) memiliki simbol yang kosong dari arti; (5) memperhatikan semesta pembicaraan; dan (6) konsisten dalam sistemnya. Belajar matematika berarti belajar objek abstrak (objek mental) yang ada dalam pikiran. Objek abstrak meliputi: fakta, konsep, operasi, dan prinsip. **Fakta** berupa konvensi-konvensi yang dinyatakan dengan simbol tertentu, seperti bilangan tujuh disimbolkan dengan angka

"7", fakta "4 + 5" dikonstruksi di dalam otak sebagai "empat tambah 5", simbol "∅" dikonstruksi sebagai himpunan kosong, dan sebagainya. Konsep merupakan ide abstrak yang dapat digunakan untuk menglasifikan sekumpulan objek. Sebagai contoh "jajar genjang merupakan segiempat yang memiliki dua pasang sisi berhadapan sama panjang". Dari konsep tersebut dapat digunakan untuk membedakan mana bangun yang merupakan jajar genjang dan mana yang bukan jajar genjang.



Gambar 1.4. Konsep dan Bukan Konsep Jajar Genjang

Ketiga gambar tersebut memiliki dua pasang sisi sama panjang. Gambar 1.4. (b) memiliki dua pasang sisi sama panjang, yaitu AB = BC dan AD = CD, namun sisi-sisi yang sama panjang tersebut **bukan sisi berhadapan** sehingga Gambar 1.4. (b) bukan jajar genjang. Gambar 1.4. (a) memiliki dua pasang sisi berhadapan sama panjang (AB berhadapan dengan CD dan AB = CD; AD berhadapan dengan BC dan AD = BC). Begitupula Gambar 1.4. (c) merupakan jajar genjang, karena memiliki dua pasang sisi berhadapan sama panjang. Gambar 1.4. (c) juga memiliki nama lain, yakni persegi panjang, karena sudutnya siku-siku. Jadi jajar genjang yang memiliki sudut siku-siku disebut persegi panjang. Contoh konsep lain adalah *fungsi*. Fungsi dari himpunan A ke himpunan B merupakan relasi yang memasangkan (mengaitkan) setiap anggota himpunan A dengan *tepat satu* anggota B. Konsep fungsi ini bisa digunakan untuk membedakan mana yang merupakan fungsi dan mana yang bukan fungsi



Gambar 1.5. Konsep dan Bukan Konsep Fungsi

Gambar 1.5. (a) bukan fungsi karena ada anggota A yang berpasangan dengan dua anggota di B (tidak memenuhi "*tepat satu*"). Gambar 1.5. (b) merupakan fungsi karena memenuhi syarat sebagai fungsi, yakni ***setiap anggota*** himpunan A memiliki pasangan ***tepat satu*** dengan anggota B. Gambar 1.5. (c) bukan fungsi, karena ada satu anggota A yang tidak berpasangan dengan anggota B (tidak memenuhi "*setiap*"). Gambar 1.5. (d) merupakan fungsi, karena ***setiap*** anggota A memiliki ***tepat satu*** pasang anggota B. Contoh lain konsep adalah "variabel", "konstanta", "matriks", "vector", "group", dan "ruang metrik".

B. Kesalahan dalam Proses Konstruksi Konsep Matematika

Kajian tentang kesalahan siswa dalam mengonstruksi konsep matematika dan pemecahan masalah sudah banyak dilakukan (Brodie, 2010; Shein, 2012; Gal & Linchevski, 2010; Bingolbali, dkk, 2010; Subanji, 2007; Subanji & Nusantara T, 2013, 2015). Brodie (2010) menjelaskan bahwa kesalahan siswa dalam membangun penalaran matematika meliputi: *basic error, appropriate error, missing information, partial insight.* Shein (2012) mengkaji pemanfaatan gesture untuk memperbaiki kesalahan matematika siswa. Gal & Linchevski (2010) menemukan bahwa kesulitan siswa dalam representasi geometri mencakup: *(1) perceptual organization: Gestalt principles, (2) recognition: bottom-up and top-down processing; and (3) representation of perception-based knowledge: verbal vs. pictorial representation, mental images and hierarchical structure of images.*

Bingobali, dkk (2010) mengeksplorasi penyebab terjadinya kesulitan matematika siswa berdasarkan pandangan guru, yang meliputi: *Epistemological causes, Psychological causes, Pedagogical cause.* Kesulitan sebagai awal dari proses terjadinya kesalahan. Kesalahan siswa juga bisa berbentuk pseudo (Subanji, 2007), pseudo benar dan pseudo salah. Pseudo benar terjadi ketika siswa memperoleh jawaban benar tetapi sebenarnya penalarannya salah. Pseudo salah terjadi ketika jawaban siswa salah, tetapi sebenarnya siswa tersebut mampu bernalar secara benar.

Subanji & Nusantara, T (2015) menelusuri lebih lanjut tentang kesalahan konstruksi konsep dan pemecahan masalah dan ditemukan bahwa kesalahan siswa dalam mengonstruksi konsep matematika dapat diklasifikasikan dalam lima bentuk, yakni *pseudo-contruction*, lubang konstruksi, *mis-analogical contruction, mis-connection,* dan *mis-logical construction.*

Pseudo contruction terjadi pada saat siswa mengonstruksi konsep operasi bilangan dan operasi aljabar. Dalam proses mengonstruksi konsep operasi bilangan bulat, siswa tidak menggunakan garis bilangan atau pola sebagai dasarnya. Siswa lebih banyak menggunakan analogi "hutang" sebagai representasi bilangan negatif. Siswa juga merepresentasikan operasi dan lambang bilangan sebagai sesuatu yang sama, yakni "hutang". Akibatnya siswa tidak bisa memberi alasan ketika ada pernyataan "dikurangi dengan bilangan negatif". Mereka hanya membuat pembenaran bahwa negatif ketemu negatif hasinya positif atau negatif dikalikan negatif hasilnya positif. Padahal dalam operasi bilangan bulat yang bisa dikalikan hanya bilangan, tidak ada konsep perkalian bilangan dengan operasi. Seakan-akan siswa mengonstruksi konsep operasi bilangan, namun kenyataannya konstruksinya berupa "hutang", karena itu ada psudo konstruksi. Pseudo contruction juga terjadi pada masalah operasi aljabar. Ketika siswa dihadapkan pada masalah $2x + 3x = 5x$, siswa menjawab benar. Jawaban siswa tersebut benar, namun ketika ditelusuri lebih lanjut, konstruksi siswa semu (pseudo contruction). Siswa mengonstruksi variabel x dan y bukan merupakan bilangan, tetapi merupakan "benda". Sehingga alasan menjumlahkan $2x + 3x = 5x$ dan tidak bisa dijumlahannya 2x dan 3y bukan karena sifat operasi bilangan dalam matematika, tetapi karena bendanya berbeda.

Lubang konstruksi terjadi ketika siswa mengonstruksi konsep luas daerah dan konsep segitiga. Siswa bisa menghitung luas daerah dan bisa menuliskan satuan luasnya dengan m^2, namun proses mengonstruksinya ada lubang. Konsep luas belum terkonstruksi, hanya prosedur yang berhasil dikonsruksi. Hal ini ditandai dengan pernyataan siswa tentang satuan m^2 dihasilkan dari mxm bukan dari konsep persegi satuan. Lubang knstruksi juga terjadi pada konsep segitiga. Lubang konstruksi terjadi dengan tidak terkonstruksinya syarat untuk membuat suatu segitiga, yakni jumlah panjang dua sisi sebarang harus **lebih besar** dari panjang satu sisi yang lain. Dalam kasus tersebut $6 + 7 = 13 < 14$, jadi tidak memenuhi syarat suatu segitiga. Siswa tidak tahu atau tidak memperhatikan syarat dan langsung menyimpulkan bahwa segitiga tersebut bisa dibuat, karena ada tiga sisi. Bagi siswa yang penting ada tiga sisi berarti bisa dibuat segitiga, tanpa memperhatikan panjang dari ketiga sisinya. Siswa yang lain memeriksa segitiga atau bukan segitiga dengan menggunakan teorema phytagoras. Proses konstruksi siswa "lubang" pada justifikasi segitiga harus phytagoras, karena itu segitiga harus memenuhi triple phytagoras.

Mis-analogical contruction terjadi ketika siswa mengonstruksi konsep akar, pangkat, dan fungsi. Dalam konstruksi akar dan pangkat, siswa menganggap bahwa operasi dalam bilangan akar dan pangkat sama dengan operasi bilangan biasa. Siswa tidak mengontruksi sifat akar dan pangkat sebagai sesuatu yang berbeda dengan sifat operasi bilangan biasa. Proses analogi salah juga terjadi pada kasus fungsi. Siswa masih banyak yang mengonstruksi analogi salah ketika dihadapkan pada pernyataan jika $f(a) = f(b)$ maka $a=b$. Siswa menganggap $f(a) = f(b)$ analog dengan perkalian $m.a = m.b$. Pada kasus perkalian $ma = mb$ dapat disederhanakan dengan membagi kedua ruas dengan m (untuk m tak nol), sehingga diperoleh $a = b$. Dalam fungsi diberlakukan prosedur yang sama (analog).

Lebih lanjut juga ditemukan kesalahan siswa dalam pemecahan masalah, meliputi: lubang koneksi dan kesalahan analogi. Dalam memecahkan masalah siswa tidak mampu mengaitkan konsep yang dimiliki dengan masalah yang dipecahkan, sehingga koneksi yang terjadi tidak bisa berjalan dengan baik. Kesalahan dalam koneksi matematis cukup memprihatinkan, karena siswa akan berkelanjutkan mengalami kesulitan dalam pemecahan masalah.

Pemecahan masalah sangat penting dalam belajar matematika. Subanji & Nusantara T (2015) menjelaskan bahwa *problem solving* merupakan inti dari belajar matematika, karena kemampuan *problem solving* dapat ditransfer untuk memecahkan masalah-masalah lain dalam kehidupan. Semakin baik kemampuan problem solving siswa, maka semakin besar pula peluangnya untuk mampu menghadapi tantangan kehidupan yang selalu berubah.

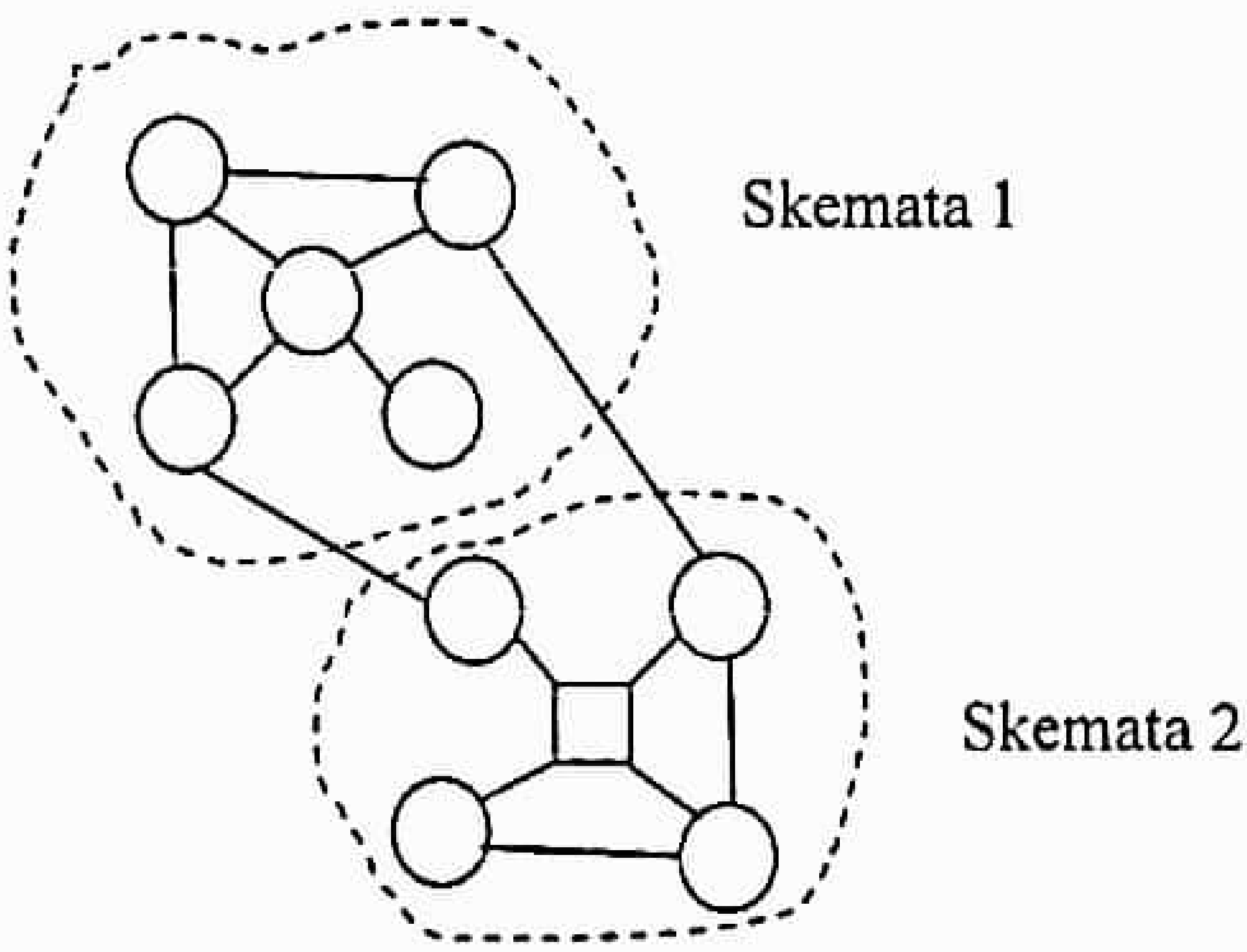
Pentingnya mengembangkan *problem solving* dalam pembelajaran matematika telah dikaji oleh beberapa peneliti (Charless dan Lester, 1997; Goos, M, 2004; Pape, 2004, Blanton dan Kaput, 2005, Lee, Brown & Orrill, 2011; Wu&Adam, 2006; Lee, 2005). NCTM (dalam Subanji, 2015) menyatakan bahwa *"solving problems is not only a goal of learning mathematics but also a major means of doing so...By learning problem solving in mathematics, student should acquire ways of thingking, habits of persistence and curiosity, and confidence in unfamiliar situation"*.

Begitu pentingnya pemecahan masalah dalam belajar matematika, maka perlu mengaji lebih mendalam bagaimana kesalahan pemecahan masalah terjadi dan bagaimana mengatasinya. Dalam hal ini kesalahan matematika siswa perlu mendapatkan perhatian, karena kalau tidak segera diatasi, kesalahan tersebut akan berdampak secara beruntun ke masalah matematika berikutnya. Untuk memperbaiki kesalahan siswa perlu menelusuri sumber kesalahannya. Hal ini dapat dilakukan dengan menggunakan peta kognitif (*cognitive map*).

Kajian tentang peta kognitif sudah banyak dilakukan (Pena, dkk, 2007; Jacobs, 2003; Perdikaris, 2012; Komf & Denicollo, 2005); dan Subanji (2015). Pena, dkk (2007) menegaskan bahwa *cognitive map* menggambarkan hubungan sebab akibat dari berbagai fenomena dan konsep, serta dapat dimodelkan. Dengan peta kognitif, alur berpikir siswa dapat ditelusuri dan digambarkan dalam diagram kognitif. Jacobs (2003) mengungkapkan bahwa cognitive map menunjukkan arah berpikir sedemikian hingga bisa menjadi petunjuk untuk melangkah berikutnya. Langkah-langkah yang dituliskan oleh siswa mencerminkan apa yang sedang dipikirkan dan bisa digunakan untuk menelusuri kesalahan berpikir matematikanya. Perdikaris (2012) menjelaskan cogntive style siswa dalam menyelesaikan masalah geometri dengan teori Van Hielle. Sedangkan Elbaz dkk (dalam Komf & Denicollo 2005) menggunakan cognitive map untuk menjelaskan struktur pengetahuan yang dimiliki oleh guru atau siswa. *Cognitive map* berbeda dengan concept map. *Concept map* menunjukkan hubungan herakhi konsep, sedangkan cognitive map menggambarkan alur berpikir seseorang dalam mengonstruksi atau memecahkan masalah. Karena itu cognitive map tidak menunjukkan herarkhi, tetapi lebih menggambarkan interkoneksi antar pengetahuan, masalah, prosedur, dan konsep dari hasil berpikir seseorang.

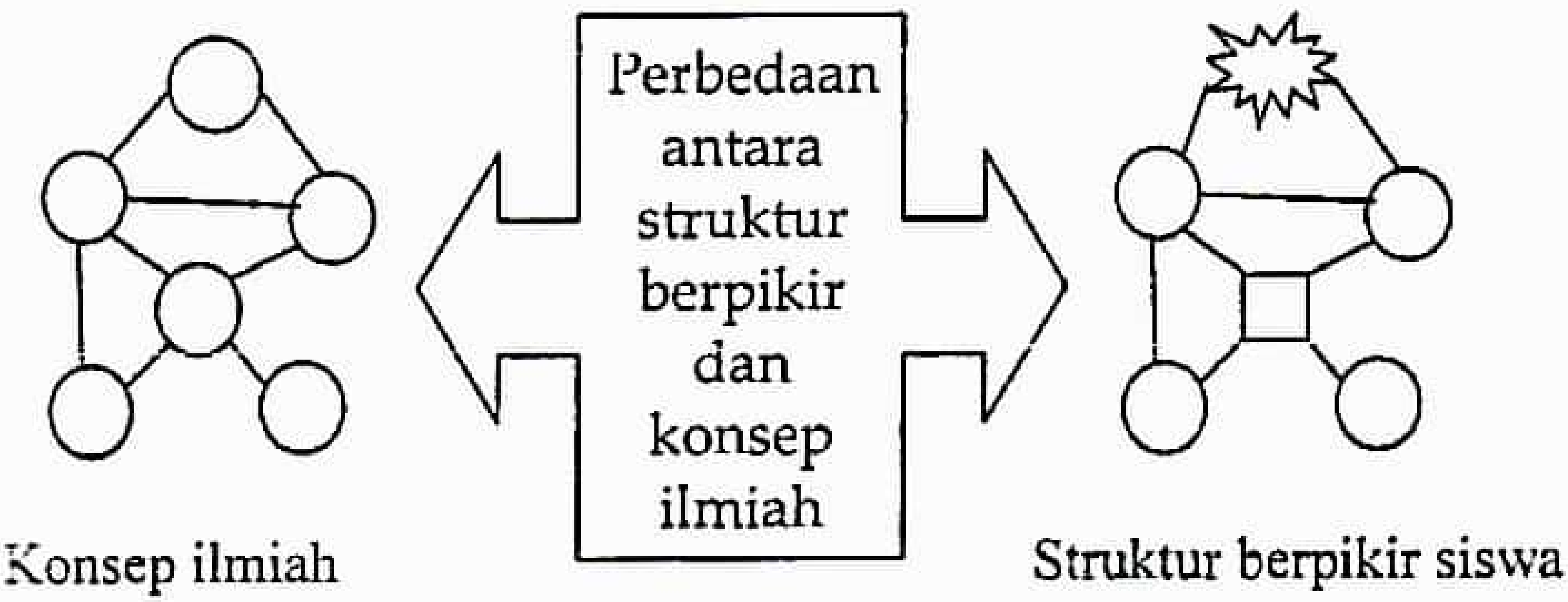
C. Defragmentasi sebagai Restrukturisasi Berpikir

Proses berpikir siswa dalam mengonstruksi konsep dan memecahkan masalah matematika menghasilkan struktur berpikir yang berbentuk skemata (kumpulan skema-skema). Skema-skema terhubung membentuk skemata dan skemata-skemata terhubung membentuk struktur struktur berpikir (jaringan skemata yang lebih besar). Proses ini berlangsung secara terus menerus dari waktu ke waktu sedemikian hingga membentuk struktur yang semakin kompleks. Dalam pembentukan struktur berpikir yang semakin kompleks tersebut, juga selalu terjadi penyesuaian (perubahan) atau pembentukan skema baru untuk menyesuaikan dengan stimulus baru yang berbeda dengan yang sudah dipahami (dikonstruksi) sebelumnya.



Gambar 1.6 Jaringan Skemata (Struktur Berpikir)

Dalam proses belajar, konstruksi struktur berpikir siswa belum tentu berlangsung sesuai dengan harapan. Dalam hal ini dimungkinkan adanya kesalahan. Sebagai catatan penting bahwa konsep yang dikonstruksi siswa, bagi siswa sendiri tidak pernah salah. Konstruksi konsep bisa dikatakan salah bila ada penyimpangan atau perbedaan dengan konsep ilmiah. Siswa tidak akan merasa salah dalam mengosntruksi konsep sebelum mendapatkan konsep ilmiahnya. Konsep ilmiah dapat diperoleh dari proses belajar lebih lanjut atau dari orang lain yang lebih "dewasa". Dalam hal ini "orang lain yang lebih dewasa" yang dimaksudkan adalah orang lain yang telah memiliki konsep ilmiah.



Gambar 1.7. Terjadinya Kesalahan Konstruksi

Kesalahan konstruksi konsep dan pemecahan masalah selamanya akan menjadi masalah, jika tidak ada upaya dari siswa yang mengalami kesalahan untuk belajar sesuai konsep ilmiah atau intervensi dari orang lain yang lebih dewasa untuk menuju konsep ilmiah. Hal ini terjadi karena struktur berpikir yang terbentuk dari jaringan skemata-skemata ada adalah salah. Struktur berpikir tersebut akan tetap salah ketika tidak mengalami perubahan dalam proses belajar. Dalam hal ini perubahan akan cepat terjadi bila ada intervensi dari orang lain atau sering disebut proses penstrukturan kembali (*restrukturisasi*). Proses restrukturisasi berpikir dalam mengonstruksi konsep atau memecahkan masalah dalam buku ini disebut ***defragmentasi***. Defragmentasi lebih khusus mengacu pada perubahan struktur berpikir karena adanya intervensi dari orang lain. Defragmentasi sebagai bagian dari restrukturisasi, dimana ada aktifitas kesengajaan untuk mengubah atau membangun struktur berpikir baru untuk menyesuaikan dengan konsep ilmiah. Dalam hal ini restrukturisasi bisa berwujud dua bentuk, yakni defragmentasi (restrukturisasi tersengaja) dan restrukturisasi alamiah, yakni perubahan struktur berpikir secara alamiah karena adanya proses belajar. Restrukturisasi (defragmentasi) berlangsung secara secara terus menerus dalam proses belajar. Seorang individu senantiasa melakukan aktifitas berpikir yang menghasilkan struktur baru atau mengubah struktur lama untuk menyesuaikan dengan konsep ilmiah yang sedang dipelajari. Dengan demikian, seseorang akan mampu menjadi lebih "matang" berpikirnya dari waktu ke waktu.

D. Pentingnya Kajian Defragmentasi Struktur Berpikir

Pengonstruksian konsep dan pemecahan masalah matematika berlangsung secara terus menerus sepanjang proses belajar siswa. Dalam proses mengonstruksi konsep dan memecahkan masalah matematika masih sering siswa mengalami kesalahan, namun tidak disadarinya. Ketiadaan kesadaran adanya kesalahan ini menunjukkan bahwa dalam proses konstruksi tidak ada "salah" bagi pengonstruksi. Pengonstruksian bisa disebut salah bila ada penyimpangan dari konsep ilmiah atau ada proses penalaran yang tidak logis.

Proses munculnya kesalahan konstruksi dapat dilacak melalui proses checking. Proses checking dapat berlangsung dalam dua bentuk: *auto checking* dan checking intervensi. *Auto checking* berlangsung dalam proses belajar, bersifat alamiah dan otomatis. Auto checking terjadi ketika seseorang belajar dan menyadari bahwa apa yang dipahami selama ini adalah salah, yang benar adalah konsep yang dipahami saat ini. Kesadaran akan kesalahan tersebut akan menjadi awal untuk memperbaikinya. Dalam hal ini dalam berpikir siswa terjadi proses *repairing*, yakni perbaikan struktur berpikir (skemata) yang sudah dikonstruksi.

Checking dengan intervensi terjadi ketika proses pengecekan dilakukan dengan adanya kesengajaan intervensi berpikir dari pihak lain, yakni bisa dari guru, dari teman, atau dari lingkungannya. Pengecekan dengan intervensi antara lain dapat dilakukan dengan aktifitas-aktifitas: memfasilitasi siswa belajar, menyediakan media, memberikan tes, meminta siswa untuk melakukan *think aload*, wawancara berbasis tugas, dan eksplorasi argumentasi konstruksi. Pengecekan dengan intervensi dapat digunakan untuk mempercepat proses pendeteksian kesalahan, sedemikian hingga lebih cepat bisa dilakukan perbaikan kesalahan. Proses perbaikan konstruksi skema (restrukturisasi berpikir) yang didahului dengan checking (pengecekan) struktur berpikir disebut defragmentasi struktur berpikir. Defragmentasi struktur berpikir sangat penting untuk dilakukan terutama untuk memperbaiki kesalahan konstruksi konsep dan pemecahan masalah matematika. Defragmenting bisa mempercepat proses belajar siswa menuju konsep ilmiah.

Proses penelusuran kesalahan konstruksi konsep dan pemecahan masalah matematika dapat dilakukan dengan memanfaatkan kerangka kerja Piaget tentang proses konstruksi pengetahuan, yaitu asimilasi dan akomodasi. Berdasarkan potret kesalahan konstruksi konsep dan pemecahan masalah matematika dapat ditindaklanjuti dengan melakukan reorganisasi struktur berpikir, pemunculan skema, atau pengaitan skema berpikir siswa. Defraghmentasi yang dideskripsikan dalam tulisan ini meliputi: memunculkan skema (*schema appearances*), merajut skema (*schema knitting*), *conflict cognitive*, memperbaiki berpikir logis, dan merajut koneksi dalam pemecahan masalah.

BAB II
ANALISIS MASALAH DAN KERANGKA KONSEPTUAL TEORI DEFRAGMENTASI STRUKTUR BERPIKIR

A. Fragmentasi Struktur Berpikir

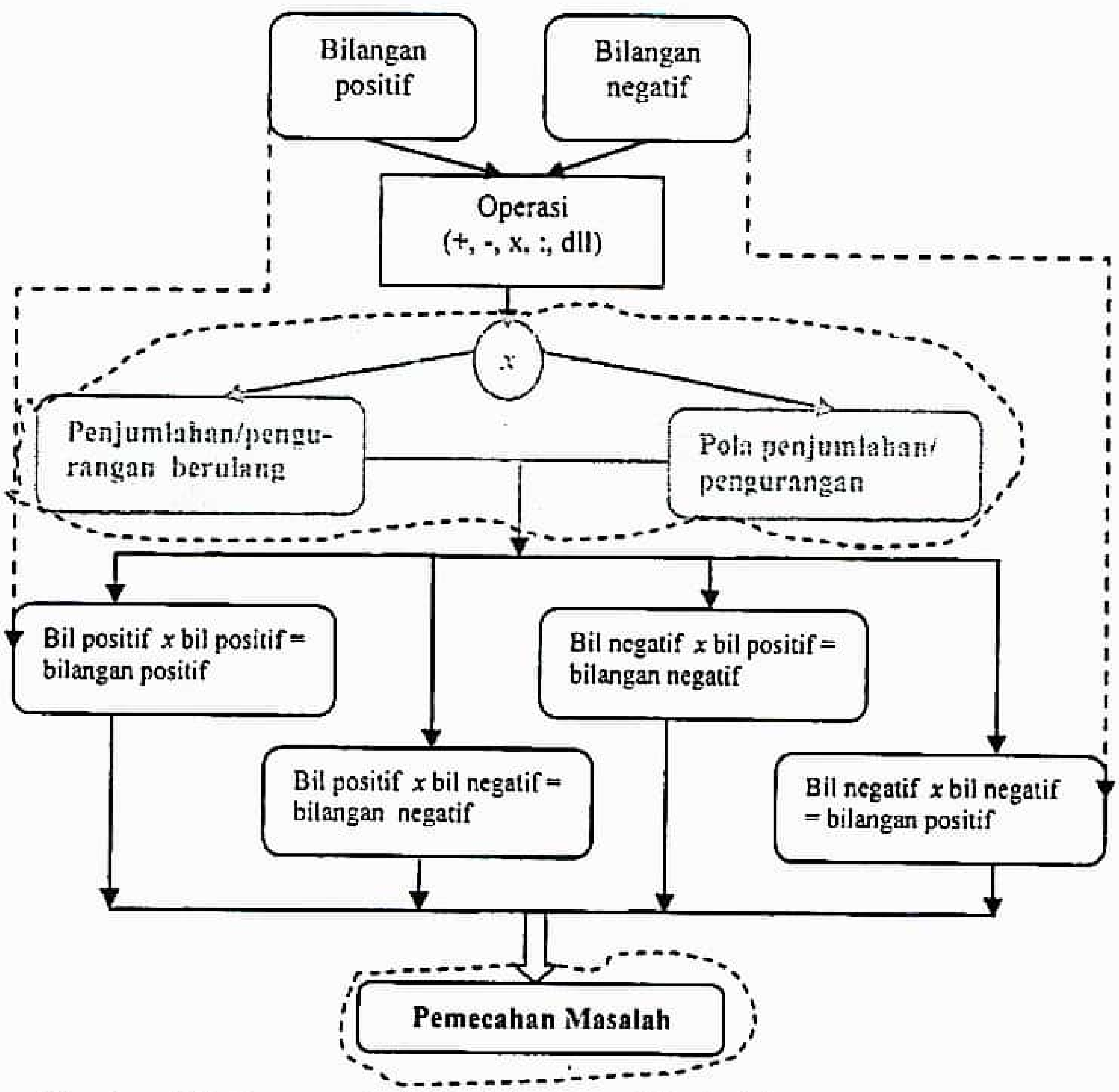
Struktur berpikir siswa dalam mengonstruksi dan memecahkan masalah matematika masih sering "terjadi" masalah *fragmentasi.* Fragmentasi struktur berpikir sering muncul sebagai akibat dari pembelajaran yang tidak bermakna. Pembelajaran yang dilakukan dengan hanya menekankan pada prosedur atau hafalan bisa menimbulkan fragmentasi berpikir siswa. Salah satu contoh kasus cuplikan pembelajaran tidak bermakna yang dilakukan oleh seorang guru matematika ketika menjelaskan operasi perkalian bilangan bulat.

G: *anak-anak kalau kita ingin mengalikan bilangan bulat, diingat ini: positif (+) kali positif (+) hasilnya positif (+); positif (+) kali negatif (-) hasilnya negatif (-); negatif (-) kali positif (+) hasilnya negatif (-); negatif (-) kali negatif (-) hasilnya (+). Diingat ini ya!*

S: *ya bu*

G: *contohnya 7 x 5 = ... 7 positif dan 5 positif, jadi hasilnya positif 35. Kalau 7 x -5 = ... 7 positif dan -5 negatif, jadi hasilnya negatif -35. Bentuk yang lain -7 x 5 = ... -7 negatif dan 5 positif, jadi hasilnya negatif -35. Yang terakhir -7 x – 5 = ... -7 negatif dan -5 negatif, jadi hasilnya positif 35. Itu aturannya, kamu harus hafal.*

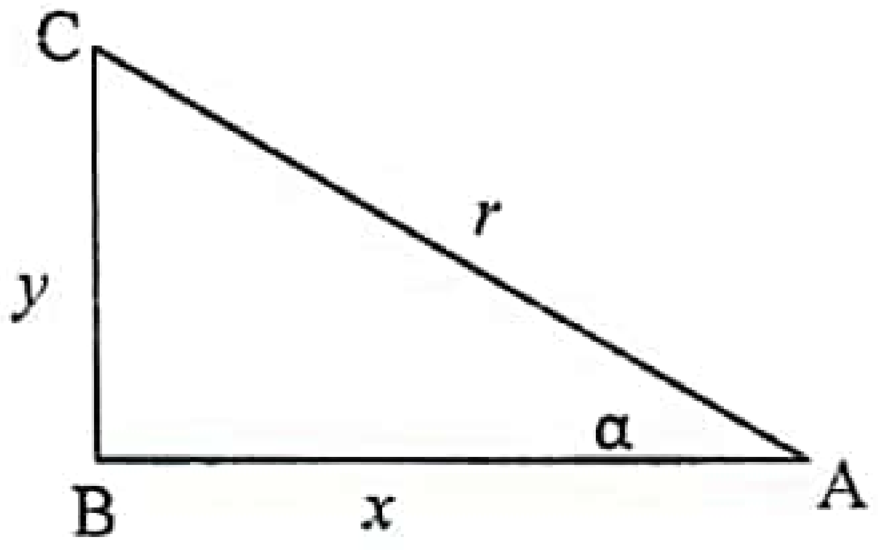
Dalam kasus pembelajaran tersebut terjadi konstruksi dalam pikiran siswa, namun konstruksi yang terjadi "sangat lemah" dan menghasilkan struktur berpikir yang terfragmentasi. Siswa hanya menghafalkan prosedur dan menggunakannya untuk menghitung perkalian bilangan bulat. Ingatan siswa akan prosedur akan mudah hilang (lupa). Selain itu siswa tidak akan mampu menjawab mengapa perkalian bilangan bulat yang bertanda sama hasilnya positif dan mengapa perkalian bilangan bulat bertanda berbeda menghasilkan bilangan positif. Dalam hal ini siswa "diperankan mirip seperti mesin", diprogram aturannya dengan menghafal prosedur dan jika ada input langsung bisa menghasilkan jawaban. Ada proses konstruksi pembentukan konsep yang hilang (tidak dilakukan), yakni proses penjumlahan berulang atau pola perkalian bilangan bulat. Fragmentasi struktur berpikir siswa dapat digambarkan seperti berikut.



Gambar 2.1. Fragmentasi Struktur Berpikir dari Proses Pembelajaran

Proses konstruksi konsep operasi perkalian bilangan bulat oleh siswa terjadi fragmentasi. Konstruksi terjadi secara terpisah-pisah, karena tidak munculnya konsep secara bermakna. Siswa hanya menghafal prosedur dan bisa menggunakan prosedur sebatas mengalikan (belum sampai pemecahan masalah).

Contoh pembelajaran "kurang bermakna" yang dapat mengakibatkan terjadinya fragmentasi struktur berpikir siswa adalah pembelajaran materi trigonometri. Guru membelajarkan siswa materi fungsi trigonmetri dari segitiga siku-siku.



Gambar 2.2. Segitiga Siku-siku

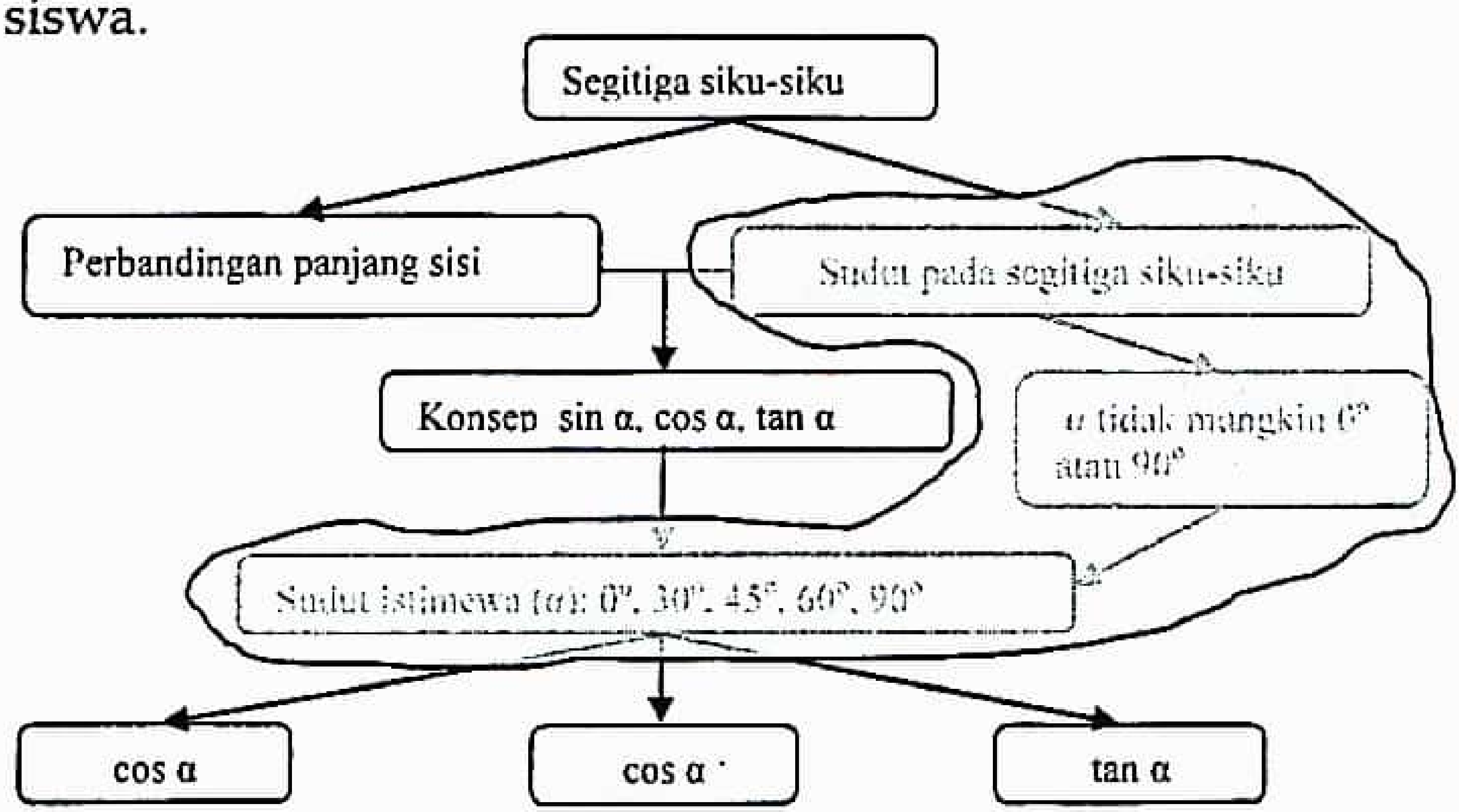
Diberikan segitiga ABC dengan $<BAC = \alpha$, panjang sisi-sisinya $AB = x$, $BC = y$, dan $AC = r$, maka didefinisikan sin α, cos α, tan α seperti berikut.

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}$$
$$\cos\alpha = \frac{x}{r}$$
$$\tan\alpha = \frac{y}{x}$$

Penjelasan dilanjutkan dengan memberikan nilai sin α, cos α, tan α pada sudut-sudut istimewa dengan menggunakan tabel berikut.

	Sudut istimewa (α)				
	0°	30°	45°	60°	90°
Sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
Cos α	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tan α	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Dalam proses pembelajaran tersebut, nampak penyampaian konsep "seperti terurut", namun sebenarnya ada "proses yang hilang". Ketika membangun konsep sin α, cos α, dan tan α menggunakan segitiga siku-siku, tidak ada masalah ketika $0° < \alpha < 90°$, karena segitiganya "benar-benar ada". Konsep tersebut menjadi masalah ketika sudut $\alpha = 0°$ atau $\alpha = 90°$. Ketika $\alpha = 0°$, sisi miring (Gb 2.2) berimpit dengan sisi mendatarnya, sehingga tidak terbentuk segitiga siku-siku (hanya berbentuk garis lurus mendatar). Ketika $\alpha = 90°$, sisi miring (Gb 2.2) berimpit dengan sisi tegaknya, sehingga tidak terbentuk segitiga siku-siku (hanya berbentuk garis lurus tegak). Dengan proses pembelajaran seperti di atas, akan dapat menimbulkan fragmentasi struktur berpikir siswa.



Gambar 2.1. Fragmentasi dalam Konstruksi Materi Trigonometri

Fragmentasi nampak dengan adanya pertentangan fakta bahwa pada awalnya konsep sinus, cosinus, dan tangen dibangun menggunakan segitiga siku-siku. Sinus suatu sudut sebagai perbandingan panjang sisi di depan sudut dengan sisi terpanjang di segitiga siku-siku. Cosinus suatu sudut sebagai perbandingan panjang sisi dekat sudut dengan sisi terpanjang dari segitiga siku-siku. Tangen suatu sudut sebagai perbandingan panjang sisi di depan sudut dengan panjang sisi dekat sudut pada segitiga siku-siku. Artinya konsep sinus, cosinus, dan tangen dibangun dari segitiga siku-siku. Masalah muncul ketika menentukan sinus, cosinus, dan tangen dari sudut nol atau sudut 90. Masalahnya adalah ketika sudut di segitiga siku-siku tersebut nol apakah masih berbentuk segitiga dan ketika sudut di segitiga siku-siku tersebut 90° apakah bangunnya masih segitiga? Ternyata kalau sudutnya nol, salah satu sisinya akan berimpit dengan salah satu sisi yang lain, sehingga tidak menjadi segitiga (berbentuk garis lurus). Begitupula ketika sudutnya 90, berarti ada 2 sudut siku-siku dan tidak akan membentuk segitiga. Hal ini menunjukkan adanya fragmentasi struktur berpikir yang berakibat "konstruksi tidak utuh".

Fragmentasi dapat menghambat proses belajar siswa untuk mengosntruksi materi berikutnya. Fragmentasi dapat berbentuk: "struktur tidak lengkap", "struktur semu", "struktur terpisah", dan "struktur teracak (tidak terurut)". Fragmentasi dalam bentuk *struktur tidak lengkap* sering disebut *lubang konstruksi* (Subanji, 2015). Fragmentasi dalam bentuk struktur semu sering disebut konstruksi semu (Subanji, 2015). Fragmentasi struktur terpisah terjadi karena proses belajar hafalan prosedur. Fragmentasi struktur teracak terjadi sebagai akibat proses pembelajaran yang tidak memperhatikan urutan prasyarat.

Fragmentasi sering tercermin dari proses konstruksi yang salah dan berdampak pada kesalahan dalam belajar matematika atau memecahkan masalah matematika. Dalam hal ini kesalahan dalam belajar matematika telah dikaji oleh banyak peneliti (Brodie, 2010; Bingolbali, dkk, 2010; Shein, 2012; Subanji & Nusantara T, 2016). Brodie (2010) menjelaskan bahwa kesalahan siswa dalam belajar matematika bisa berbentuk: *basic error, appropriate error, missing information, partial insight*. *Basic error* dicontohkan terjadi ketika siswa menjawab $x^2 + 1 = 2x^2$. Siswa berpikir bahwa ada satu x^2 ditambah satu, maka hasilnya adalah satu tambah satu x^2 atau bisa ditulis $2x^2$. *Appropriate error* tercermin dari pernyataan siswa dalam penyelesaian masalah *"if x is negative number, you can write it as –x"*, jika x bilangan negatif, maka bisa ditulis $-x$. Dalam hal ini siswa berpikir bahwa x tidak bertanda negatif berarti bilangan positif, karena itu jika menginginkan x sebagai bilangan negatif, maka harus diberi tanda negatif sehingga menjadi -x. Kedua kesalahan tersebut sering disebut sebagai kesalahan konsep (Subanji, 2015).

Missing information terjadi pada saat siswa menjelaskan bahwa *"x^2 is always greather than zero"*. Pada kesalahan ini siswa tidak memahami bahwa x^2 bisa bernilai nol. Siswa berpikir bahwa bilangan kuadratik selalu positif, karena siswa tidak berpikir bahwa ada nol sehingga jika dikuadratkan tetap nol. Sementara yang lebih dominan dipikirkan oleh siswa adalah bilangan positif jika dikuadratkan akan bernilai positif dan bilangan negatif jika dikuadratkan menghasilkan bilangan positif. *Partial insight* terjadi pada saat siswa menjelaskan *"as you substitute lower number, the value of $x^2 + 1$ is decreases"*, siswa hanya berpikir parsial pada bilangan yang kecil. Kesalahan-kesalahan tersebut juga menggambarkan adanya defragmentasi struktur berpikir siswa dalam mengonstruksi konsep matematika.

Bingobali, dkk (2010) mengeksplorasi penyebab terjadinya kesulitan matematika siswa dan ditemukan bahwa kesulitan siswa antara lain dalam memahami konsep, mengabstraksi konsep, dan mengaitkan matematika dengan kehidupan sehari-hari. Kesalahan siswa dalam mengaitkan dengan kehidupan sehari-hari karena dalam pembelajaran hanya menekankan pada prosedur dan hafalan. Pembelajaran matematika tidak dilakukan secara bermakna. Siswa hanya hafal prosedur dan menggunakan prosedur tersebut untuk menyelesaikan soal-soal yang ada di buku. Dari waktu ke waktu siswa hanya memperoleh pembelajaran dengan memandang matematika sebagai bidang studi yang penuh dengan rumus yang harus dihafalkan untuk bisa mengerjakan soal-soal yang ada. Akibatnya ada jarak antara matematika dan kehidupan yang dijalankan oleh siswa. Matematika dipandang sebagai mata pelajaran yang kering dan jauh dari kegunaannya dalam kehidupan.

Shein (2012) mengaji kesalahan siswa dalam mengonstruksi konsep matematika pada materi fungsi dan memperbaikinya dengan memanfaatkan gesture. Kesalahan dalam menggambarkan grafik fungsi, sering terjadi dalam bentuk kurang miring atau kurang tegak dan dapat diperbaiki dengan menggerakkan tangan untuk mengarahkan garis yang digambar agar lebih dimiringkan lagi atau lebih ditegakkan lagi. Kesalahan dalam belajar fungsi juga bisa berbentuk kecerobohan dalam menyelesaikan masalah fungsi. Gesture dapat digunakan untuk menekankan kembali bagian-bagian yang perlu diperhatikan dalam proses penyelesaian masalah. Dengan demikian kesalahan tidak terulang kembali. Ditemukan juga oleh Shein (2012) bahwa gesture tidak hanya sekedar gerakan, tetapi bisa diarahkan untuk memfokuskan perhatian siswa sehingga konsentrasi berpikir lebih maksimal dan dampaknya dapat mengurangi kesalahan siswa berikutnya.

Subanji dan Nusantara T (2015) menjelaskan bahwa kesalahan siswa dalam mengonstruksi konsep berbentuk: lubang konstruksi, pseudo konstruksi, kesalahan koneksi (*misconnection*), dan kesalahan analogi. Lubang konstruksi terjadi ketika siswa mengonstruksi bentuk aljabar. Siswa bisa menyelesaikan masalah terkait dengan penjumlahan $2x + 3x = 5x$, namun dalam berpikir siswa variabel x diartikan sebagai benda, seperti buku, pensil, apel, dan sebagainya. Proses konstruksi yang terjadi pada siswa adalah *dua buku ditambah tiga buku menghasilkan lima buku*. Berpikir siswa sepertinya masuk akal, namun konteks yang digunakan tidak sesuai dengan content bentuk aljabar. Berpikir siswa tersebut akan mengalami benturan ketika dihadapkan pada masalah x^2 atau $\sqrt{x}$. Kuadrat dari x berarti kuadrat dari buku, akar dari x berarti akar dari buku, di mana keduanya tidak ada maknanya. Dalam hal ini ada lubang konstruksi, karena konsep tentang variabel x sebagai bilangan "tidak muncul" dan konsep sifat operasi bilangan juga "tidak muncul". Akibatnya konsep penjumlahan 2x + 3x yang seharusnya menggunakan sifat distrbutif (2+3)x menjadi "tidak muncul", dengan kata lain ada lubang konstruksi.

Pseudo construction (konsruksi semu) terjadi, salah satunya pada masalah operasi bilangan bulat. Siswa mampu menyelesaikan masalah -5 – 2 = -7 dengan mengilustrasikannya sebagai "punya hutang 5 dan hutang lagi 2, sehingga hutangnya menjadi 7". Jawaban siswa benar -7, namun konstruksinya semu, yang ditandai oleh kesalahan dalam dalam mengonstruksi negatif 5 dianggap sebagai hutang 5 dan "dikurangi" 2 juga dianggap hutang 2. Dalam hal ini tanda bilangan negatif disamakan dengan operasi "minus" 2. Seakan-akan jawaban siswa benar, namun kenyataannya berpikir siswa salah. Hal ini menunjukkan adanya konstruksi semu pada berpikir siswa.

Ketiadaan koneksi (mis-connection), salah satunya tergambar dari proses menyelesaikan masalah berikut.

Jika suatu persegi panjang, ukuran panjangnya bertambah 10% dan lebarnya bertambah 20%, maka tentukan prosentase bertambahnya luas daerah persegi panjang tersebut!

Siswa memahami masalah dengan baik, ditandai dengan diketahuinya panjang persegi panjang bertambah 10% dan lebarnya bertambah 20% serta yang ditanyakan berkaitan dengan prosentase pertambahan luas daerah persegi panjang.

Diketahui : Panjang persegi panjang bertambah 10%
lebarnya bertambah 20%
Ditanya : Berapa % pertambahan luas daerah
persegi panjang ?

Siswa juga memahami bahwa pertambahan panjang 10% identik dengan 0,1 dan pertambahan panjang 20% identik dengan 0,2. Penyelesaian siswa berhenti pada pemahaman 0,1 dan 0,2, dan siswa tidak bisa mengoneksikan dengan panjang dan lebarnya. Pertambahan panjang 0,1 seharusnya dimaknai sebagai panjang baru (p') sebagai panjang lama (p) ditambah dengan 0,1 p. Dengan kata lain siswa seharusnya mengoneksikan $p' = p + 0{,}1p$. Dalam hal ini koneksi "panjang lama" dan "panjang baru" tidak muncul. Begitupula dengan "lebar baru" dan "lebar lama" juga tidak muncul. Siswa tidak bisa mengoneksikan $l' = l + 0{,}1l$. Akibatnya terjadi kesalahan dalam menemukan prosentase pertambahan luas daerah persegi panjang.

Jawab :

Pertambahan panjang $= 10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 0{,}1$

Pertambahan lebar $= 20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5} = 0{,}2$

Langkah selanjutnya yang dilakukan oleh siswa adalah menentukan luas daerah persegi panjang dengan mengalikan $0{,}1 \times 0{,}2 = 0{,}2$ dan akhirnya disimpulkan bahwa prosentase pertambahan luasnya adalah 20%.

Maka luas daerah $= P \times L$

$= 0{,}1 \times 0{,}2$

$= 0{,}02$

$= \frac{20}{100} = 20\%$

Dalam penyelesaian tersebut juga mengalami kesalahan $0{,}1 \times 0{,}2 = 0{,}2$, seharusnya 0,02. Namun demikian penyebab utama terjadinya kesalahan adalah ketiadaan koneksi antara "panjang baru" dan "panjang lama" serta "lebar baru" dan "lebar lama". Seharusnya koneksi terbangun dari $p' = p + 0{,}1p$ dan $l' = l + 0{,}1l$ serta "luas baru" (L') sebagai perkalian antara p' dan l'. Sehingga proses koneksi bisa ditulis sebagai berikut.

$L' = p' \times l'$

$L' = (p+0{,}1p)x(l+0{,}2l)$

$= 1{,}1p \times 1{,}2l$

$= 1{,}32\ pxl$

$= 1{,}32\ L$

$= L + 0{,}32L$

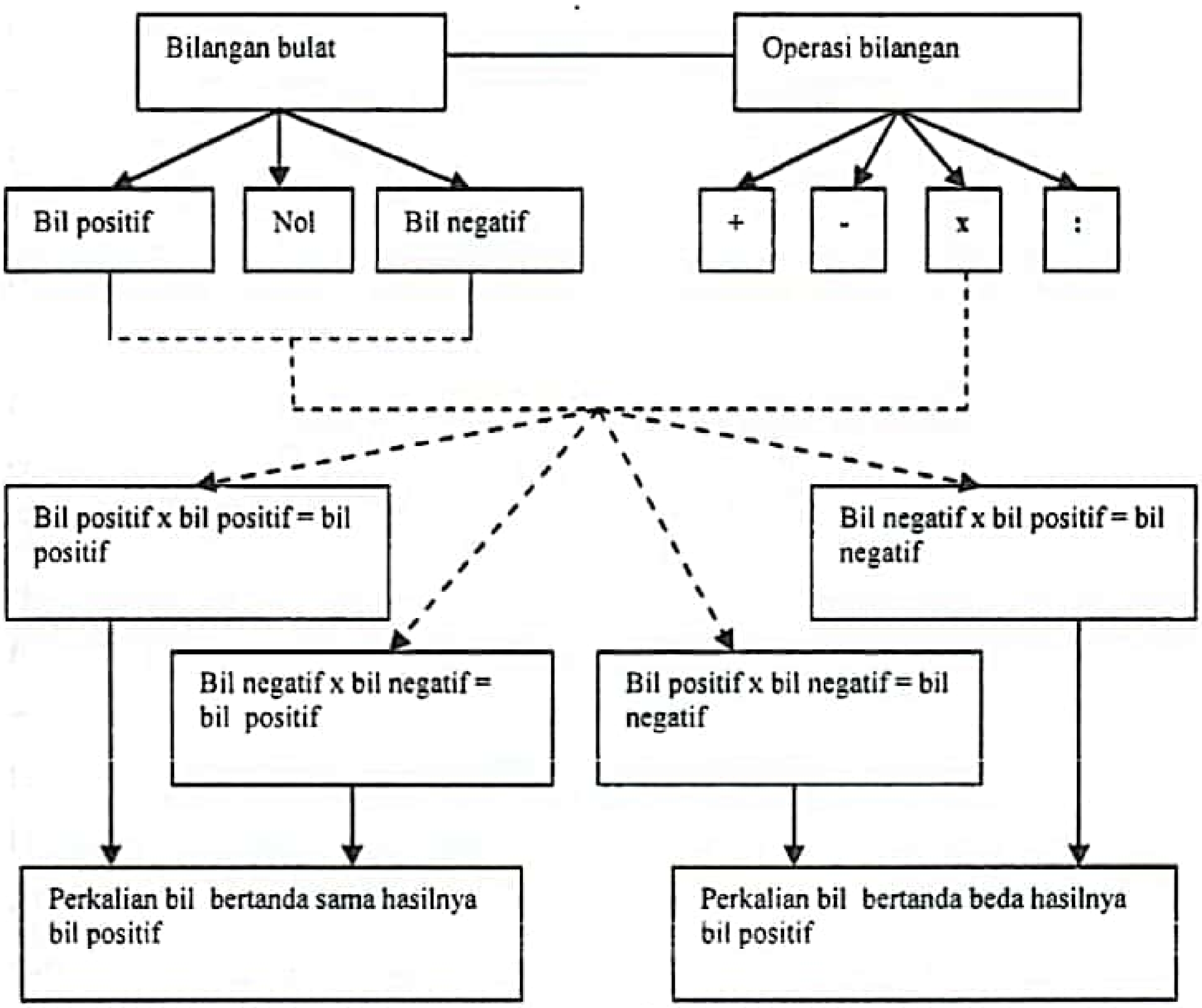
Jadi prosentase pertambahan luas daerah persegi panjang sama dengan 0,32 atau 32% dari "luas lama".

Kesalahan analogi terjadi salah satunya pada kasus menyelesaikan masalah penjumlahan $\sqrt{x}$ dengan $\sqrt{x}$. Siswa menentukan penjumlahan $\sqrt{x} + \sqrt{x} = \sqrt{2x}$. Dalam hal ini penjumlahan dalam bentuk akar dianalogikan dengan penjumlahan biasa sehingga $\sqrt{x} + \sqrt{x}$ analog dengan $x + x = 2x$.

Kesalahan-kesalahan berbentuk konstruksi semu, lubang konstruksi, ketiadaan koneksi, dan kesalahan dalam analogi menunjukkan adanya fragmentasi dalam proses mengonstruksi konsep dan memecahkan masalah. Untuk menelusuri adanya fragmentasi dapat dilakukan melalui peta kognitif (*cognitive map*). Kajian tentang peta kognitif sudah banyak dilakukan (Pena, dkk, 2007; Jacobs, 2003; Perdikaris, 2012; Komf & Denicollo, 2005). Pena, dkk (2007) menegaskan bahwa *cognitive map* menggambarkan hubungan sebab akibat dari berbagai fenomena dan konsep. Alur berpikir siswa dapat ditelusuri dan digambarkan dengan peta kognitif. Jacobs (2003) menggambarkan *cognitive map* sebagai arah berpikir sedemikian hingga bisa menjadi petunjuk suatu langkah berpikir ke langkah berpikir berikutnya. Langkah-langkah yang dituliskan oleh siswa mencerminkan apa yang sedang dipikirkan. Karena itu *cognitive maps* bisa digunakan untuk menelusuri fragmentasi berpikir siswa. Perdikaris (2012) menggunakan istilah berbeda, yakni *cogntive style* yang menggambarkan struktur berpikir siswa dalam menyelesaikan masalah geometri dengan teori Van Hielle. Elbaz dkk (dalam Komf & Denicollo 2005) menggunakan *cognitive map* untuk menjelaskan struktur pengetahuan yang dimiliki oleh guru atau siswa. Subanji (2015) menjelaskan *cognitive map* berbeda dengan *concept map*. *Concept map* menunjukkan hubungan herakhi konsep, sedangkan *cognitive map* menggambarkan alur berpikir seseorang dalam mengonstruksi konsep atau memecahkan masalah. Karena itu cognitive map tidak menunjukkan herarkhi, tetapi lebih menggambarkan interkoneksi antar pengetahuan, masalah, prosedur, dan konsep dari hasil berpikir seseorang.

B. Defragmentasi Struktur Berpikir

Fragmentasi struktur berpikir siswa dalam operasi (perkalian) bilangan bulat, nampak ketika siswa hanya mengonstruksi prosedur: bilangan positif dikali bilangan positif hasilnya bilangan positif, bilangan positif dikali bilangan negatif hasilnya bilangan negatif, bilangan negatif dikali bilangan positif hasilnya bilangan negatif, dan bilangan negatif dikali bilangan negatif hasilnya bilangan positif. Konstruksi juga berlanjut dengan menghafalkan: perkalian bilangan bertanda sama menghasilkan bilangan positif dan perkalian bilangan bertanda berbeda menghasilkan bilangan negatif. Dalam kasus pembelajaran yang menekankan prosedur dan hafalan akan membentuk fragmentasi struktur berpikir pada siswa. Dalam hal ini siswa belajar (mengonstruksi) materi operasi perkalian bilangan bulat dengan prosedur dan hafalan. Fragmentasi struktur berpikir dalam kasus ini dapat digambarkan dengan cognitive maps sebagai berikut.



Gambar 2.2. Fragmentasi struktur berpikir

Proses konstruksi bilangan sudah berlangsung baik, sudah dikonstruksi bilangan bulat memiliki unsur-unsur bilangan positif, nol, dan bilangan negatif. Begitupula sudah dikonstruksi operasi bilangan antara lain: penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian. Fragmentasi struktur berpikir terjadi pada saat mengonstruksi perkalian dua bilangan bulat (ditandai oleh garis putus-putus). Konstruksi yang terjadi tidak bermakna, sebaliknya konstruksi terjadi secara tiba-tiba, "pokoknya" bilangan positif dikali bilangan positif hasilnya bilangan positif, bilangan negatif dikali bilangan negatif hasilnya bilangan positif, dan sebagainya. Konstruksi berikutnya sebagai akibat dari pengelompokan perkalian bilangan bertanda sama menghasilkan bilangan positif dan perkalian bilangan bertanda berbeda menghasilkan bilangan negatif. Dalam hal ini tidak muncul skema yang menjadi alasan kenapa perkalian bilangan positif dengan bilangan negatif hasilnya bilangan negatif dan kenapa perkalian bilangan negatif dengan bilangan negatif hasilnya bilangan positif. Hal ini menunjukkan bahwa terjadi fragmentasi struktur berpikir.

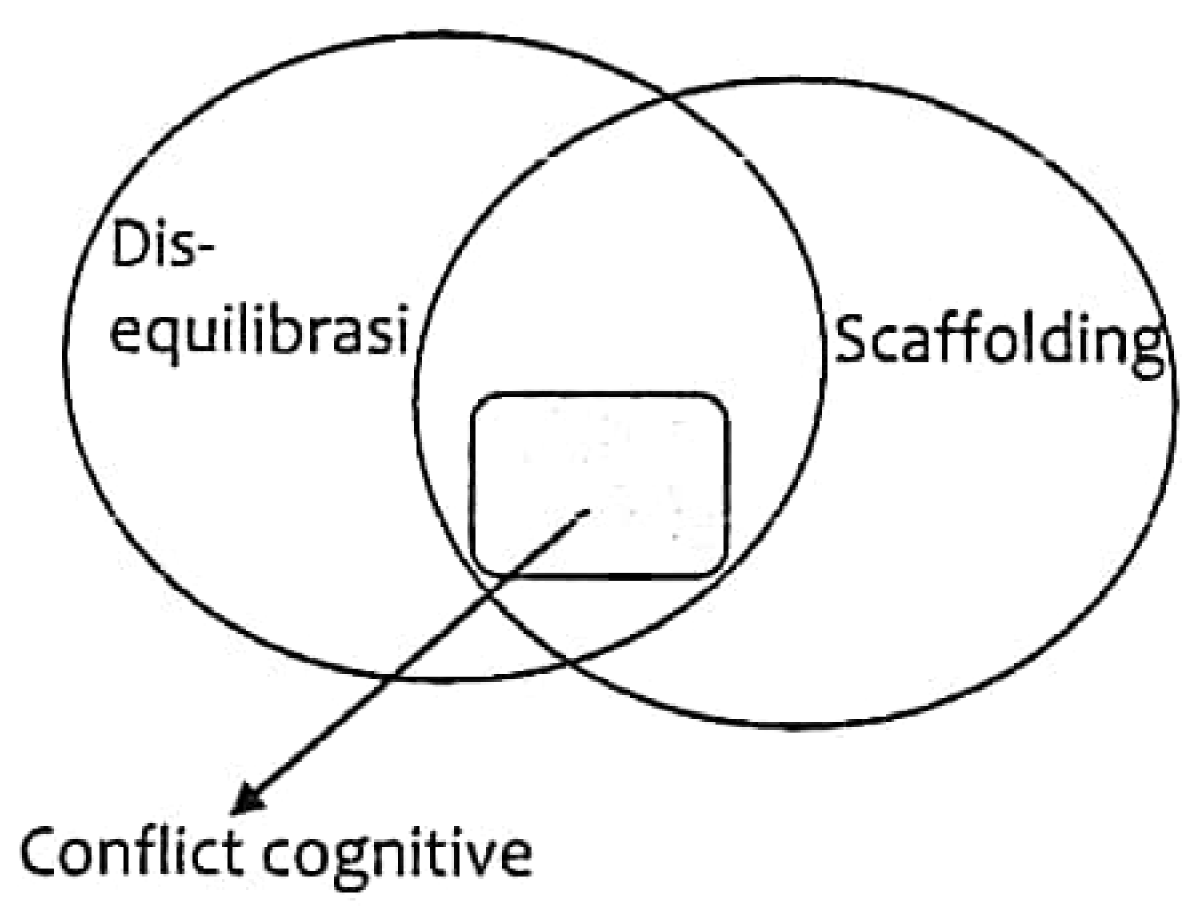
Fragmentasi akan mengganggu proses belajar siswa pada materi berikutnya. Siswa yang masih mengalami masalah (fragmentasi) cenderung akan bermasalah pada materi selanjutnya, karena penguasaan suatu materi menjadi prasyarat untuk materi berikutnya. Matematika sebagai mata pelajaran yang memiliki herarki ketat dalam susunan materinya. Suatu materi matematika sering terkait dengan materi matematika yang lain, sehingga penguasaan suatu materi menjadi sangat penting untuk belajar materi lebih lanjut. Kesalahan dalam mengonstruksi konsep dan pemecahan masalah matematika seringkali terjadi karena adanya fragmentasi struktur berpikir. Fragmentasi struktur berpikir akan terus berlanjut dari waktu ke waktu selama belum adanya perbaikan terhadap struktur berpikir siswa, sehingga kesalahan belajar matematika bisa terjadi lagi pada proses belajar materi matematika berikutnya. Dalam hal ini untuk memperbaiki fragmentasi struktur berpikir dapat dilakukan dengan melakukan defragmentasi struktur berpikir.

Defragmentasi struktur berpikir secara garis besar dapat dikelompokkan dalam dua bentuk, yakni defragmentasi mandiri yang terjadi secara alami (*self-defragmentation*) dan defragmentasi terencana karena adanya intervensi. Ketika siswa mengalami kesalahan karena adanya fragmentasi dan mereka belajar secara terus menerus, maka secara otomatis akan muncul defragmentasi struktur berpikirnya. Defragmentasi struktur berpikir secara alami (*self-defragmen-*

tation) membutuhkan waktu yang lama, karena dipengaruhi oleh beberapa faktor, antara lain: motivasi diri, fasilitas pendukung, lingkungan, dan perkembangan ipteks. Siswa yang mengalami kesalahan dan fragmentasi struktur berpikir, ketika memiliki motivasi belajar yang tinggi maka akan segera terjadi proses defragmentasi struktur berpikirnya secara alami. Begitupa siswa yang memiliki fasilitas lengkap dan mendukung terjadinya belajar, maka akan segera terjadi proses defragmentasi secara alami. Siswa yang memiliki lingkungan mendukung untuk belajar, juga akan mempercepat terjadinya defragmentasi struktur berpikir secara alami. Siswa yang mengikuti perkembangan ipteks secara terus menerus akan mempercepat terjadinya proses defragmentasi secara alami. Hal utama dalam proses defragmentasi struktur berpikir secara alami adalah kesadaran dan kemauan untuk selalu belajar serta kecapatan berpikir dalam proses belajar.

Kendala utama berlangsungnya defragmentasi struktur berpikir secara alami adalah rendahnya (ketiadaan) motivasi siswa yang mengalami fragmentasi untuk belajar. Siswa yang mengalami fragmentasi struktur berpikir cenderung mengalami kesulitan dalam mengonstruksi dan memecahkan masalah matematika. Kesulitan tersebut memicu terjadinya kesalahan dan akhirnya prestasi siswa tersebut rendah. Siswa-siswa yang mengalami fragmentasi struktur berpikir akan cenderung "merasa" terpinggirkan (rendah diri), sehingga motivasi belajarnya menjadi rendah. Secara otomatis, siswa tersebut akan mengalami kesulitan untuk bisa defragmentasi secara alami. Karena itu perlu upaya memberikan bantuan kepada siswa agar mampu melakukan defragmentasi struktur berpikirnya. Dengan kata lain perlu defragmentasi terencana melalui intervensi oleh "orang yang lebih ahli".

Defragmentasi struktur berpikir terencana dapat dilakukan melalui beberapa aktifitas, antara lain: *conflict cognitive,* disequilibrasi, dan scaffolding. Ketiga bentuk aktifitas defragmentasi struktur berpikir tersebut saling beririsan. Dengan *conflict cognitive* akan muncul disequilibrasi sehingga akan terjadi penataan kembali struktur berpikirnya. Scaffolding merupakan bantuan secukupnya (seminimal mungkin), sehingga pemahaman siswa bisa meningkat ke zona proximal development. *Scaffolding* dapat dilakukan dengan berbagai macam cara, salah satunya adalah conflict cognitive. *Scaffolding* juga dapat dilakukan dengan mengajukan pertanyaan-pertanyaan yang dapat menimbulkan disequilibrasi, sehingga berpikir siswa bisa mencapai zona proximal development (ZPD) serta ZPD terus berkembang seiring perkembangan zona actual. Hubungan ketiga proses defragmentasi struktur berpikir dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 2.3. Hubungan Conflict Cognitive, Disequilibrasi, dan Scaffolding

Conflict cognitive cenderung efektif digunakan ketika fragmentasi struktur berpikir siswa terkait dengan kesalahan konsep. Ketika siswa mengalami kesalahan konsep ½ + 1/3

= 2/5, perlu dieksplorasi bagaimana proses siswa menjawab masalah tersebut. Kalau fragmentasi struktur berpikir siswa "pembilang ditambah pembilang dan penyebut ditambah penyebut", maka defragmentasi struktur berpikir dapat dilakukan dengan conflict cognitive, "bagaimana dengan ½ + ½?". Ketika siswa menjawab ½ + ½ = 1, bisa dilanjutkan dengan mempertanyakan "kalau dilakukan dengan pembilang ditambah pembilang dan penyebut ditambah penyebut, hasilnya 2/4, apakah 2/4 = 1?". Pertanyaan apakah 2/4 = 1? Akan memancing conflict di dalam berpikir siswa (*conflict cognitif*), karena 2/4 = ½ ≠ 1. Hasil akhir yang bertentangan dengan proses yang sudah dilakukan, dapat mendorong siswa melakukan refleksi dan akan terjadi proses defragmentasi struktur berpikir, bahwa konstruksi konsep (pemahaman) yang dimiliki oleh siswa selama ini masih salah, karena itu perlu memperbaikinya.

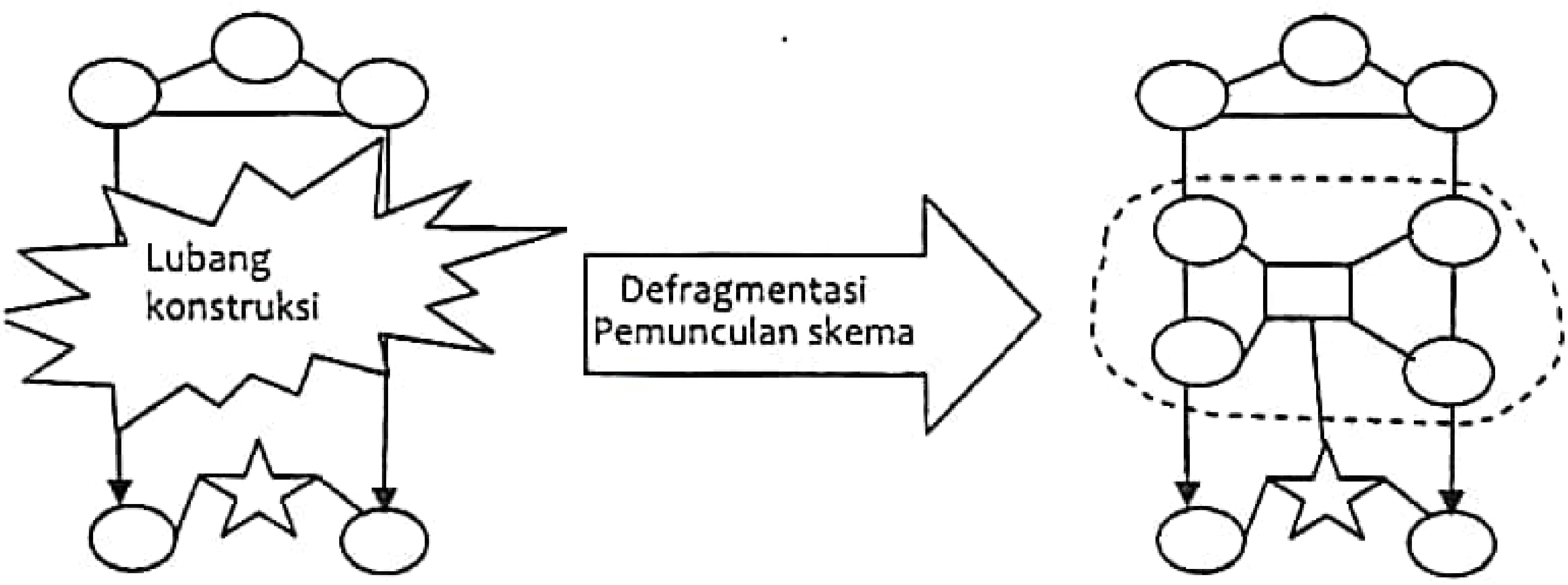
Defragmentasi struktur berpikir terkait dengan disequilibrasi dilakukan dengan memberikan pertanyaan-pertanyaan menelusur kebermaknaan dari suatau materi atau pertanyaan-pertanyaan yang bertentangan dengan apa yang telah dikonstruksi. Dengan demikian akan muncul ketidakseimbangan antara asimilasi dan akomodasi, sehingga terjadi penataan struktur berpikir baru. Dalam hal ini defragmentasi struktur berpikir dengan "intervensi terencana" akan dapat mempercepat terjadinya restrukturisasi berpikir siswa, sehingga proses konstruksi konsep dan pemecahan masalah akan berlangsung secara baik dan terhindar dari terjadinya kesalahan. Hal ini menunjukkan penting defragmentasi struktur berpikir siswa dalam mengonstruksi konsep dan pemecahan masalah.

C. Kerangka Konseptual Defragmentasi Struktur Berpikir

Defragmentasi struktur berpikir merupakan proses menata kembali struktur berpikir yang mengalami fragmentasi. Salah satu bentuk adanya fragmentasi struktur berpikir adalah adanya kesalahan yang dialami oleh siswa dalam mengonstruksi konsep dan memecahkan masalah matematika. Menurut Subanji & Nusantara T (2016) ada empat macam proses terjadinya kesalahan siswa dalam mengontruksi konsep dan memecahkan masalah, yakni: (a) lubang konstruksi, (b) lubang koneksi, (c) *mis-analogical thinking*, dan (d) *mis-logical thinking*.

Defragmentasi struktur berpikir dapat dilakukan kepada siswa yang mengalami fragmentasi struktur berpikir yang berwujud adanya kesalahan-kesalahan dalam proses mengonstruksi konsep dan memecahkan masalah matematika. Dalam hal ini defragmentasi struktur berpikir disesuaikan dengan jenis fragmentasi (kesalahan-kesalahan) nya. Dalam hal ini terdapat 4 (empat) jenis defragmentasi struktur berpikir: (1) pemunculan skema, (2) pemunculan koneksi, (3) perbaikan struktur berpikir analogis, dan perbaikan struktur berpikir logis. Fragmentasi - lubang konstruksi dapat didefragmentasi dengan memunculkan skema berpikir. Fragmentasi – lubang koneksi dapat didefragmentasi dengan merajut skema berpikir. Fragmentasi – kesalahan berpikir analogi dapat dilakukan defragmentasi dengan memunculkan makna. Fragmentasi – kesalahan berpikir logis dapat didefragmentasi dengan memperbaiki struktur logika berpikir.

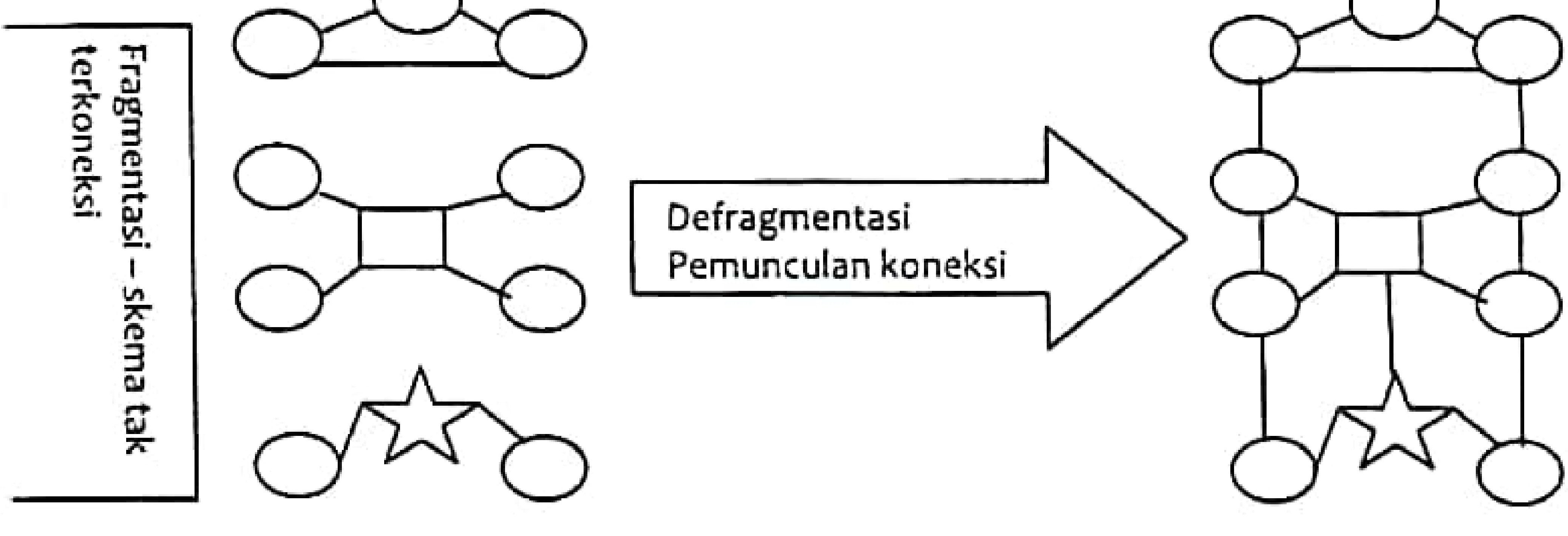
Defragmentasi struktur berpikir siswa dalam mengonstruksi konsep dan memecahkan masalah matematika dengan pemunculan skema dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 2.4. Proses Defragmentasi – Pemunculan Skema

Dari gambar 2.4. terlihat bahwa dalam proses mengosntruksi konsep, struktur berpikir siswa "belum lengkap". Dalam skema berpikirnya ada lubang konstruksi. Supaya skema berpikirnya lengkap, maka dilakukan defragmentasi dengan memunculkan skema. Dengan kemunculan skema baru yang menjembatani skema yang sudah ada, maka konstruksi konsep menjadi skema yang utuh dan bermakna. Dalam hal ini siswa akan mampu menggunakan skema yang terbentuk untuk memecahkan masalah yang lebih kompleks.

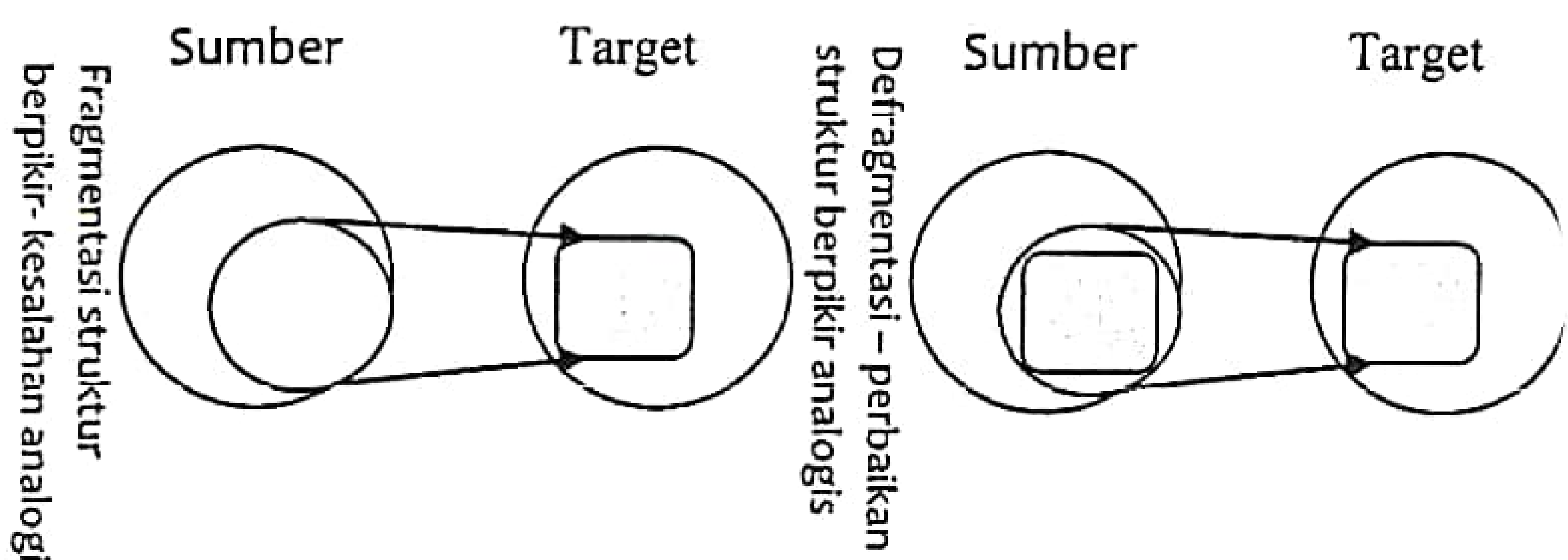
Defragmentasi struktur berpikir siswa dalam mengonstruksi konsep dan memecahkan masalah matematika dengan memunculkan koneksi dapat diilustrasikan seperti Gambar 2.5. berikut.



Gambar 2.5. Proses Defragmentasi – Pemunculan Koneksi

Fragmentasi struktur berpikir terjadi ketika siswa sudah memiliki skema-skema pembentuk struktur skema yang lebih besar, namun skema-skema tersebut masih belum terkoneksi dan siswa tidak bisa membangun koneksi untuk membentuk struktur skema yang lebih besar. Defragmentasi struktur berpikir dapat dilakukan dengan memunculkan koneksi antar skema sehingga membentuk struktur skema yang lebih besar. Dengan demikian akan terbentuk struktur berpikir yang lebih kompleks sebagai representasi dari pengonstruksian konsep dan pemecahan masalah. Pemunculan koneksi dapat dilakukan dengan tiga bentuk aktifitas berpikir, yakni conflict cognitive, disequilibrasi, dan scaffolding.

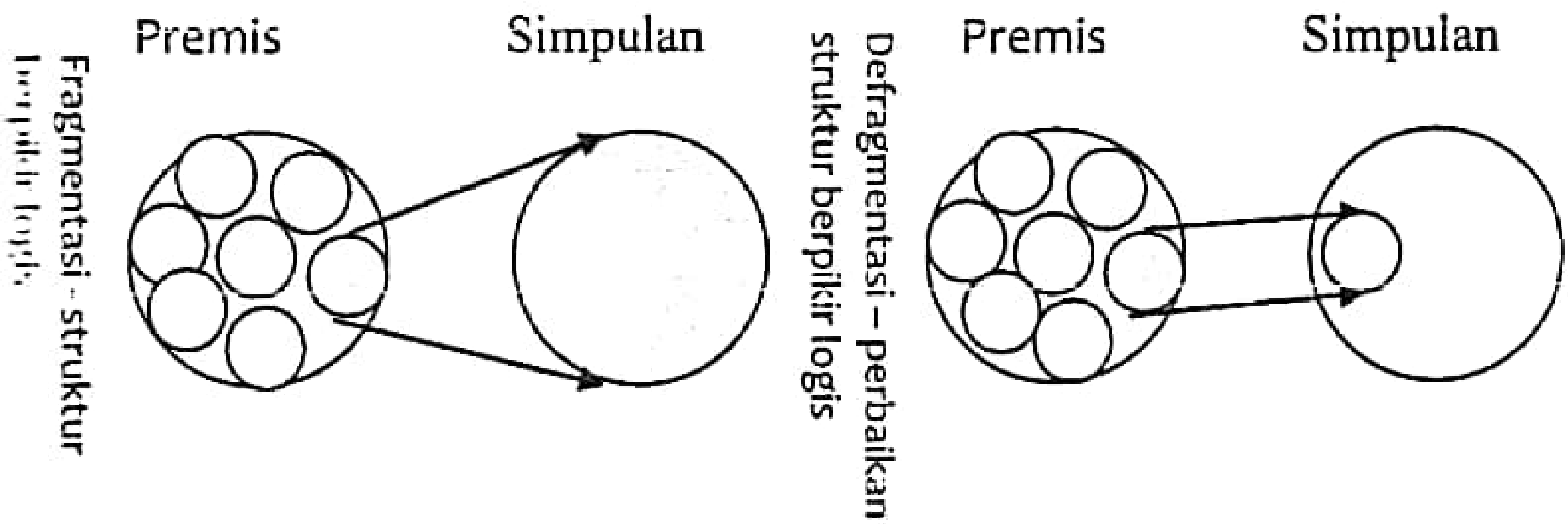
Defragmentasi struktur berpikir siswa dalam mengonstruksi konsep dan memecahkan masalah matematika berkaitan dengan proses memperbaiki kesalahan berpikir analogi dapat disajikan pada Gambar 2.6 berkut.



Gambar 2.6. Defragmentasi Perbaikan Struktur Berpikir Logis

Fragmentasi struktur berpikir analogis terjadi ketika siswa sudah memiliki struktur berpikir (sumber) yang berbeda struktur target, tetapi struktur berpikir (sumber) tersebut langsung dimanfaatkan untuk menyelesaikan masalah target. Dalam hal ini terjadi ketidaksesuaian antara sumber dan target. Karena itu defragmentasi dilakukan dengan memperbaiki struktur berpikir analogisnya melalui pemunculan prasyarat karakteristik struktur masalah.

Defragmentasi perbaikan struktur berpikir siswa dalam mengonstruksi konsep dan memecahkan masalah matematika terkait dengan perbaikan struktur berpikir logis dapat diilistrasikan seperti Gambar 2.7. berikut.



Gambar 2.7. Defragmentasi Perbaikan Struktur Berpikir Logis

Fragmentasi struktur berpikir logis terjadi ketika siswa menyimpulkan suatu sifat (besar) hanya didasarkan pada kasus khusus, padahal kasus khusus tersebut tidak bisa mewakili sifat umum dari kesimpulan. Defragmentasi struktur berpikir logis dapat dilakukan dengan memunculkan sifat yang berlaku pada hal khusus, sehingga kesimpulan ditarik dari sifat-sifat yang sama dan akhirnya menghasilkan simpulan valid.

D. Rumusan Masalah

Mengonstruksi konsep dan memecahkan masalah matematika menjadi bagian yang sangat penting dalam belajar matematika. Fragmentasi struktur berpikir siswa dalam belajar matematika perlu menjadi perhatian khusus. Begitupula hal yang sangat penting adalah bagaimana memperbaiki fragmentasi struktur berpikir siswa dalam belajar matematika. Dalam hal ini perlu dilakukan defragmentasi struktur berpikir untuk memperbaiki struktur berpikir siswa yang mengalami fragmentasi dan kesalahan berpikir matematis. Karena itu masalah yang sangat penting untuk dibahas adalah (1) bagaimana fragmentasi struktur berpikir siswa dalam mengonstruksi konsep dan memecahkan masalah matematika; (2) apa saja bentuk-bentuk defragmentasi struktur berpikir siswa dalam mengonstruksi konsep dan pemecahan masalah matematika; (3) bagaimana proses defragmentasi struktur berpikir: (a) pemunculan skema, (b) pemunculan koneksi, (c) perbaikan berpikir analogis, dan (d) perbaikan berpikir analitis siswa dalam mengonstruksi konsep dan memecahkan masalah matematika.

E. Metode Pemecahan Masalah

Masalah defragmentasi struktur berpikir dapat dilakukan melalui tahapan-tahapan: (1) mengeksplorasi fragmentasi struktur berpikir siswa dalam mengosntruksi konsep dan memecahkan masalah matematika menggunakan peta kognitif; (2) menyusun instrumen intervensi "scaffolding, conflict cognitive, dan disequilibrasi"; (3) melakukan tindakan intervensi terbatas; dan (4) memotret perubahan struktur berpikir menggunakan peta kognitif. Pada tahap eksplorasi fragmentasi dilakukan dua pendekatan, kuantitatif dan kualitatif. Pendekatan kuantitatif dilakukan untuk menjaring gejala fragmentasi struktur berpikir dengan subjek cukup besar, selanjutnya untuk menelusuri lebih mendalam bentuk fragmentasi struktur berpikir dilakukan eksplorasi pada subjek yang terbatas. Dilakukannya eksplorasi pada subjek terbatas, dimaksudkan untuk memperoleh data yang lengkap dan mendalam terkait dengan proses berpikir siswa dalam mengonstruksi konsep dan menyelesaikan masalah matematika. Hasil eksplorasi proses berpikir digambarkan dengan peta kognitif agar dapat ditelusuri terjadinya defragmentasi struktur berpikirnya, sehingga dapat dilakukan defragmentasi struktur berpikir dengan intervensi yang sesuai.

Eksplorasi fragmentasi struktur berpikir siswa dalam mengonstruksi konsep matematika dilakukan dengan memberikan instrumen utama dan instrumen pelacak. Eksplorasi fragmentasi struktur berpikir siswa dalam memecahkan masalah matematika menggunakan instrumen 2 soal pemecahan masalah. Eksplorasi dilakukan dengan melibatkan 288 siswa kelas IX SMP/MTs yang tersebar di 6 kabupaten/kota: Kota Malang, Kota Blitar, Kabupaten Blitar, Kabupaten Tulungagung, Kabupaten Jombang, dan Kabupaten Pasuruan. Sebaran subjek dalam kegiatan eksplorasi kesalahan konstruksi konsep dan pemecahan masalah sebagai berikut.

Tabel 2.1: Subjek Eksplorasi Kesalahan Konstruksi

No	Kabupaten/Kota	Jumlah
1	Kota Malang	48
2	Kota Blitar	28
3	Kabupaten Blitar	32
4	Kabupaten Tulungagung	60
5	Kabupaten Jombang	64
6	Kabupaten Pasuruan	56
Jumlah		288

Dari hasil eksplorasi fragmentasi struktur berpikir siswa dalam mengosntruksi konsep dan pemecahan masalah matematika selanjutnya dikelompokkan berdasarkan bentuk kesalahannya yang meliputi: pseudo konstruksi, lubang konstruksi, kesalahan koneksi, kesalahan berpikir analogis dan kesalahan berpikir logis.

Terjadinya fragmentasi struktur berpikir diperdalam dengan *indept interview* pada masing-masing bentuk kesalahannya. *Indept interview* dimaksudkan untuk memperoleh data proses konstruksi dan mempermudah melakukan defragmentasi dengan *intervensi terbatas* untuk memperbaiki kesalahan konstruksi dan pemecahan masalah matematika. Dari proses defragmentasi tersebut, selanjutnya dilakukan karakterisasi defragmentasi dengan intervensi terbatas. Dalam hal ini pemilihan subjek terkait dengan *indept intervew* dilakukan berdasarkan beberapa pertimbangan: (1) bentuk kesalahan, (2) mau diwawancarai, dan (3) memiliki kemampuan komunikasi secara lancar. Masing-masing daerah dipilih 2 subjek per bentuk kesalahan. Sebaran subjek *indept interview* -defragmentasi disajikan seperti Tabel 2.2 berikut.

Tabel 2.2: Sebaran Subjek Penelitian

No	Jenis kesalahan	Subjek
1	Pseudo konstruksi	12
2	Lubang konstruksi	12
3	Kesalahan koneksi	12
4	Kesalahan analogi	12
5	Kesalahan berpikir logis	12
	Jumlah	60

Dari bentuk-bentuk kesalahan tersebut didefragmentasi dengan intervensi terbatas dan dikarakterisasi jenis defragmentasinya.

Pengumpulan data secara lengkap dilakukan dengan tiga tahap. Tahap pertama, siswa diberi masalah untuk diselesaikan. Dalam proses penyelesaian masalah siswa mengungkapkan secara keras apa yang sedang ia pikirkan. Dalam proses penyelesaian masalah dilakukan perekaman ungkapan verbal dari siswa dan mencatat perilaku (ekspresi) siswa, termasuk hal-hal unik yang dilakukan oleh siswa, ketika menyelesaikan masalah tersebut. Pengumpulan data semacam ini, tergolong dalam metode ***Think Out Loud*** (Olson, Dufffy, dan Mack, 1988). Untuk masalah yang sama, ahli lain (Erricson and Simon, 1996; Calder & Sarah, 2002) menggunakan istilah ***Think Alouds***. Metode ini dilakukan dengan meminta subjek untuk menyelesaikan masalah sekaligus menceritakan proses berpikirnya. *Think alouds* dikembangkan oleh ahli psikologi kognitif dengan tujuan untuk mempelajari bagaimana seseorang memecahkan masalah. Ketika seseorang memecahkan masalah, maka apa yang dipikirkan dapat direkam dan dianalisis untuk menentukan proses cognitive yang terkait dengan masalahnya. Olson, Duffy, dan Mack (1988) menegaskan bahwa metode *Think Out Loud (atau Think Alouds)* dikhususkan untuk mengkaji proses berpikir.

Kedua, pemetaan fragmentasi struktur berpikir siswa dalam mengonstruksi dan memecahkan masalah matematika. Hasil kerja siswa yang mengalami fragmentasi dikelompokkan berdasarkan lima teori kesalahan konstruksi: a) teori *pseudo-contruction*, (b) teori lubang konstruksi, (c) teori fragmentasi koneksi, (d) teori *fragmentasi struktur berpikir analogis*, dan (e) *fragmentasi struktur berpikir logis*. Kesalahan dalam proses problem solving ditelusuri berdasarkan: kesalahan membuat koneksi, ketidakcukupan pengetahuan awal, kesalahan bernalar logis, ketidaklengkapan proses akomodasi, dan dominasi berpikir prosedural.

Ketiga, melakukan defragmentasi berdasarkan kesalahan siswa sekaligus memetakkan kembali skema berpikir siswa setelah defragmentasi. Selanjutnya dilakukan karakterisasi defragmentasi yang dilakukan yang mengacu pada hipotesis munculnya berbagai teori defragmentasi: *(a) theory of schema appearances, (b) theory of schema knitting, (c) theory of analogical repairing, (d) theory of logical appearances dan (e) theory of conection knitting in problem solving context.*

BAB III
FRAGMENTASI STRUKTUR BERPIKIR SISWA DALAM MENGONSTRUKSI KONSEP MATEMATIKA

Istilah fragmentasi diadopsi dari penyimpanan data di komputer. Fragmentasi (di komputer) adalah sebuah fenomena di ruang penyimpanan yang digunakan secara tidak efisien, mengurangi kapasitas penyimpanan. Fragmentasi struktur berpikir merupakan fenomena penyimpanan informasi di dalam otak yang tidak efisien sehingga menghambat proses konstruksi konsep dan pemecahan masalah matematika.

A. Fragmentasi Struktur Berpikir Siswa dalam Mengonstruksi Konsep Operasi dan Sifat Bilangan

Fragmentasi struktur berpikir siswa dalam mengonstruksi konsep operasi bilangan ditelusuri melalui instrumen tes (soal utama dan soal pelacak). Pada soal utama, siswa diminta untuk menilai pernyataan "benar atau salah" sekaligus memberikan alasannya. Dalam proses menyelesaikan soal, siswa diminta untuk mengeraskan apa yang dipikirkan (*think a load*). Untuk melengkapi data proses berpikir siswa dalam menyelesaikan soal dilakukan dengan wawancara mendalam (*in dept interview*).

BAGIAN I: SOAL UTAMA

Berilah tanda silang (X) pada jawaban yang anda anggap benar dan beri alasannya!

No	Pernyataan	Jawaban		Alasan
		Benar	Salah	
1	-4 – (-3) = -1			

Setelah siswa menyelesaikan instrumen utama dengan *think a load* kegiatan dilanjutkan dengan memberikan instrumen pelacak sebagai bentuk triangulasi data, yakni untuk meyakinkan bahwa yang dipikirkan oleh siswa benar-benar seperti apa yang dituliskan dan apa yang diungkapkan. Pada instrumen pelacak sudah disediakan alternatif jawaban terhadap pernyataan, siswa memilih yang sesuai dengan apa yang dipikirkan.

BAGIAN II: SOAL PELACAK

Berilah tanda silang (X) pada jawaban yang anda anggap benar dan beri alasannya!

No	Pernyataan	Alasan	Setuju	Tdk Setuju
1	-4 - 3 = -7	-4 – 3 = -7 (karena punya hutang 4 hutang lagi 3, hutangnya menjadi 7)		
2	-4 – (-3) = -1	-4-(-3) = -4 + 3 (karena negatif ketemu negatif adalah positif, negatif dikali negatif hasilnya positif)		

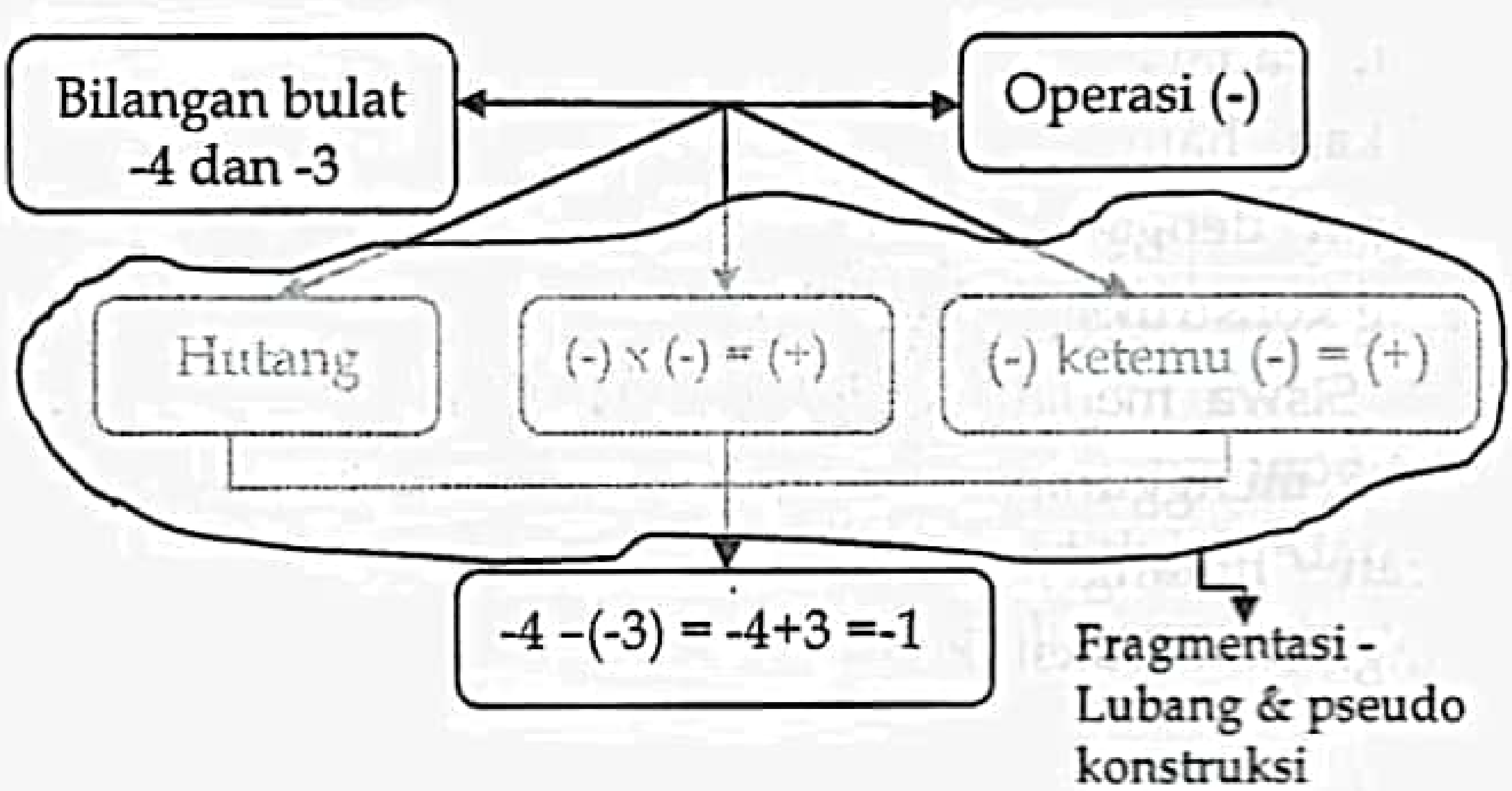
Fragmentasi struktur berpikir siswa mengonstruksi konsep operasi bilangan bulat dapat ditinjau dari dua bentuk, yakni *pseudo contruction* dan lubang konstruksi.

Ditinjau dari *pseudo contruction*, fragmentasi struktur berpikir siswa terjadi ketika **menjawab benar peryataan -4-(-3) = -1 namun alasan yang diberikan tidak sesuai.** Siswa tidak menggunakan garis bilangan atau pola sebagai dasar untuk berargumen. Siswa lebih banyak menggunakan analogi "hutang" sebagai representasi bilangan negatif. Konstruksi konsep siswa "salah" tetapi jawaban yang ditulis benar. Hal ini menunjukkan adanya konstruksi semu pada siswa (Subanji, 2015), di mana "jawaban nampak benar tetapi proses berpikir menghasilkan jawaban tersebut salah".

Dalam tinjauan *lubang konstruksi,* fragmentasi struktur berpikir siswa terjadi dalam bentuk siswa mengonstruksi konsep operasi bilangan bulat "tidak" menggunakan konsep yang benar, yakni menggunakan garis bilangan atau menggunakan pola. Fragmentasi struktur berpikir siswa terlihat, ketika menyelesaikan soal -4 -3 = -7. Dalam hal ini siswa mengonstruksi bilangan bulat "negatif empat" (-4) sebagai hutang 4 dan "dikurangi 3" (- 3) juga sebagai hutang 3. Siswa merepresentasikan operasi dan lambang bilangan sebagai sesuatu yang sama, yakni "hutang". Akibatnya siswa tidak bisa memberi alasan ketika ada pernyataan -(-3) "dikurangi dengan bilangan negatif". Mereka hanya membuat pembenaran bahwa negatif ketemu negatif hasilnya positif atau negatif dikalikan negatif hasilnya positif. Padahal dalam operasi bilangan bulat yang bisa dikalikan hanya bilangan, tidak ada konsep perkalian bilangan dengan operasi. Hal ini menunjukkan adanya lubang konstruksi dalam operasi bilangan bulat.

Siswa mengonstruksi konsep bilangan bulat negatif dengan menggunakan "hutang" dan operasi pengurangan dengan "hutang", menjadikan konstruksinya mengalami lubang. Konstruksi konsep mengalami "benturan" ketika masalah yang diberikan terkait dengan "*dikurangi bilangan negatif*", seperti -(-3) "dikurangi negatif 3". Konstruksi menjadi bermasalah, karena kalau konstruksi dilakukan secara konsisten seharusnya "hutang hutang 3" menjadi dibayar 3. Hal ini yang menjadi masalah dan bertentangan dengan konsep "hutang". Karena itu konstruksi konsep bilangan negatif sebagai hutang menimbulkan lubang konstruksi.

Proses konstruksi bilangan bulat sudah jelas dimiliki oleh siswa, karena siswa mampu menjelaskan pada garis bilangan bahwa bilangan 0 diperoleh dari 1 mundur (ke kiri) satu langkah, bilangan -1 (sebagai lawan dari bilangan 1) diperoleh dari 0 mundur (ke kiri) satu langkah, bilangan -2 (sebagai lawan dari bilangan 2) diperoleh dari -1 mundur (ke kiri) satu langkah, dan seterusnya. Fragmentasi struktur berpikir berwujud lubang konstruksi mulai terjadi ketika konstruksi bilangan negatif berubah menjadi "hutang" dan ketika konstruksi operasi pengurangan oleh bilangan negatif terjadi dengan "pokoknya negatif ketemu negatif hasilnya positif" atau " pokoknya negatif dikali negatif hasilnya positif". Fragmentasi struktur berpikir tipe lubang konstruksi pada masalah operasi bilangan bulat dapat digambarkan dengan peta kognitif sebagai berikut.



Fragmentasi struktur berpikir siswa dalam materi operasi bilangan juga terjadi pada kasus operasi "akar" berikut.

No	Pernyataan	Jawaban		Alasan
		Benar	Salah	
4	$\sqrt{3}+\sqrt{3}=\sqrt{6}$			
5	$\sqrt{(-3)^2}$ = -3			

Dalam menjawab masalah $\sqrt{3}+\sqrt{3}=\sqrt{6}$, masih banyak siswa yang menilai "benar" terhadap pernyataan $\sqrt{3}+\sqrt{3}=\sqrt{6}$, dengan alasan 3 + 3 = 6. Dengan analogi 3 + 3 = 6, maka siswa menyimpulkan $\sqrt{3}+\sqrt{3}=\sqrt{6}$. Hal ini menunjukkan bahwa siswa mengalami fragmentasi struktur berpikir "*kesalahan berpikir analogis*". Siswa menggunakan analogi penjumlahan bilangan bulat pada penjumlahan bilangan bentuk akar. Konstruksi siswa salah, operasi bilangan bulat diberlakukan pada operasi bilangan bentuk akar.

Pada masalah $\sqrt{(-3)^2}=-3$, juga masih banyak siswa yang menilai bahwa pernyataan $\sqrt{(-3)^2}=-3$ adalah benar, dengan alasan "pangkat dua diakar" akan saling menghilangkan, sehingga hasilnya -3. Fragmentasi struktur berpikir terjadi dalam bentuk "*lubang konstrusi*". Konsep akar suatu bilangan belum terkosntruksi secara "penuh", sehingga siswa mengalami kesalahan. Fragmentasi struktur berpikir lubang konstruksi dan kesalahan berpikir analogis akan berlanjut terus sampai ada defragmentasi struktur berpikir, baik secara alami maupun secara terencana.

Fragmentasi struktur berpikir siswa juga terjadi pada masalah sifat bilangan bulat. Untuk menelusuri adanya fragmentasi struktur berpikir, kepada siswa diberikan masalah berupa pernyataan sebagai berikut.

No	Pernyataan	Jawaban		Alasan
		Benar	Salah	
10	Misalahkan x,y,dan z bilangan bulat. Jika x < z dan y < z, maka x = y			
11	Misalahkan x,y,dan z bilangan bulat . Jika x < y dan x < z, maka y < z			

Siswa diminta untuk menilai pernyataan "*Misalahkan x,y,dan z bilangan bulat. Jika* $x < z$ *dan* $y < z$*, maka* $x = y$". Sebagian besar siswa menilai pernyataan tersebut sebagai pernyataan yang benar dengan alasan "karena x dan y **sama-sama** kurang dari z, maka $x = y$. Dalam hal ini siswa tidak menggunakan pola pikir logis, bahwa x dan y sebagai bilangan bulat seharusnya dimaknai sebagai bilangan bulat sebarang (bukan bilangan bulat tertentu). Hal serupa juga terjadi ketika siswa dihadapkan pada masalah menilai pernyataan "*Misalahkan x,y,dan z bilangan bulat . Jika* $x < y$ *dan* $x < z$*, maka* $y < z$". Siswa mengonstruksi sifat tersebut dengan menggunakan pijakan x, y, dan z bilangan bulat dimaknai sebagai bilangan yang terurut, sehingga dia menilai pernyataan tersebut sebagai pernyataan benar dengan alasan $x < y < z$. Kedua kasus sifat bilangan bulat tersebut menunjukkan adanya fragmentasi struktur berpikir siswa dalam mengonstruksi sifat bilangan bulat.

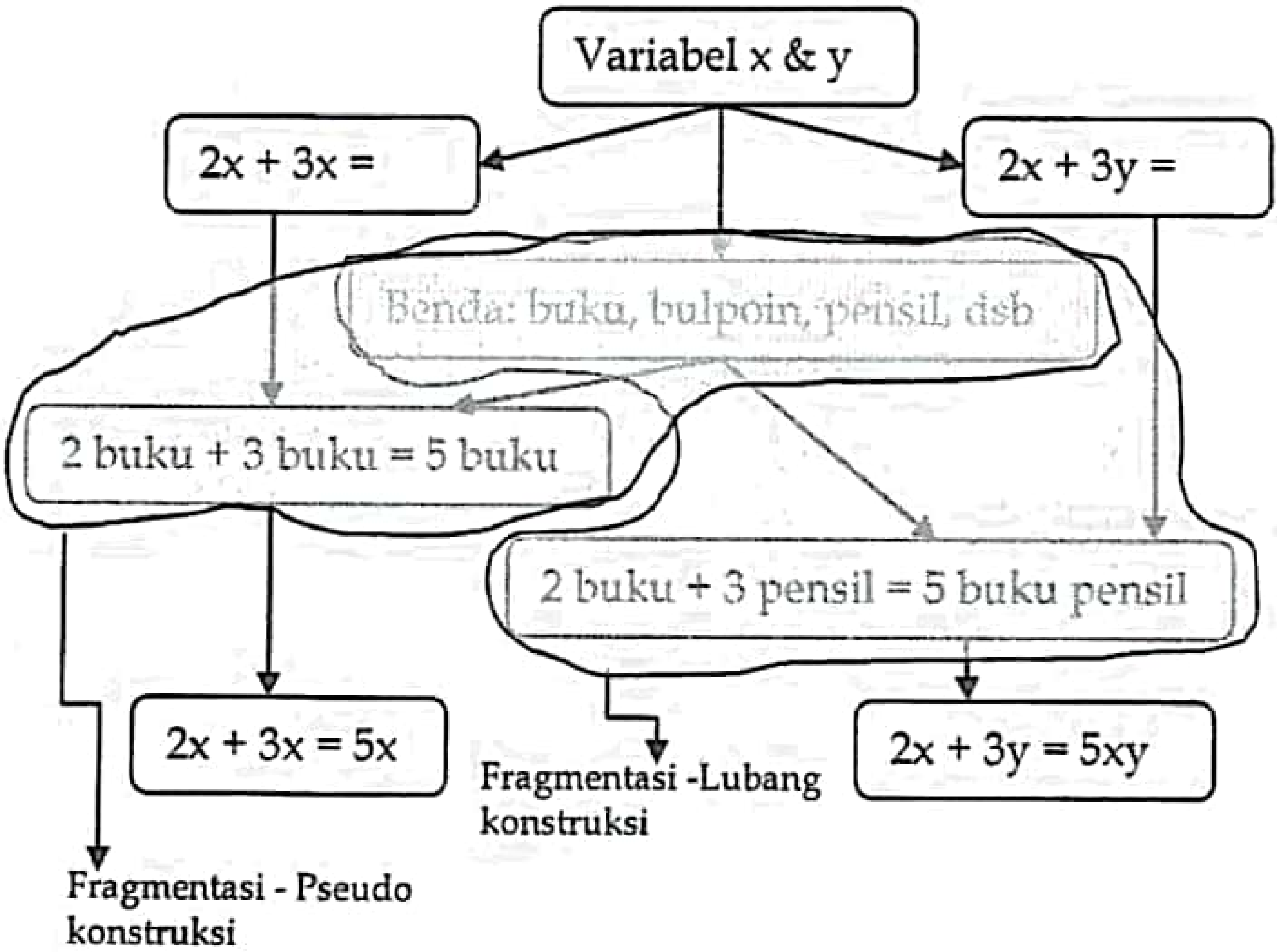
B. Fragmentasi Struktur Berpikir Siswa dalam Mengonstruksi Konsep Operasi Bentuk Aljabar

Fragmentasi struktur berpikir siswa berkaitan dengan materi operasi bentuk aljabar terjadi dalam bentuk *pseudo contruction* dan *lubang konstruksi*. Siswa mengosntruksi konsep penjumlahan atau pengurangan bentuk aljabar dengan mengaitkan dengan benda. Hal ini diperleh oleh siswa dari proses pembelajaran di kelas. Selanjutnya untuk mengungkap fragmentasi struktur berpikir siswa dalam mengonstruksi konsep operasi aljabar, siswa diminta untuk menilai pernyataan 2x + 3x = 5x dan 2x + 3y = 5xy, seperti berikut.

No	Pernyataan	Jawaban		Alasan
		Benar	Salah	
7	2x + 3x = 5x			
8	2x + 3y = 5xy			

Siswa menilai pernyataan 2x + 3x = 5x sebagai pernyataan benar, namun alasan yang diberikan tidak matematis. Hampir semua siswa mengilustrasikan masalah tersebut dengan benda. Ada yang mengilustrasikan alasan "dua buku ditambah tiga buku hasilnya lima buku", "dua bulpoint ditambah tiga bulpoint hasilnya lima bulpoint", "dua pensil ditambah tiga pensil hasilnya lima pensil", dan sebagainya. Variabe x dikonstruksi sebagai benda, sehingga bisa menghasilkan fragmentasi struktur berpikir - konstruksi semu bahwa 2x + 3x = 5x memang menghasilkan jawaban benar, namun konteks variabel x adalah bilangan (bukan benda). Sifat yang menjamin 2x + 3x = 5x adalah distributif, bahwa 2x + 3x = (2+3)x = 5x.

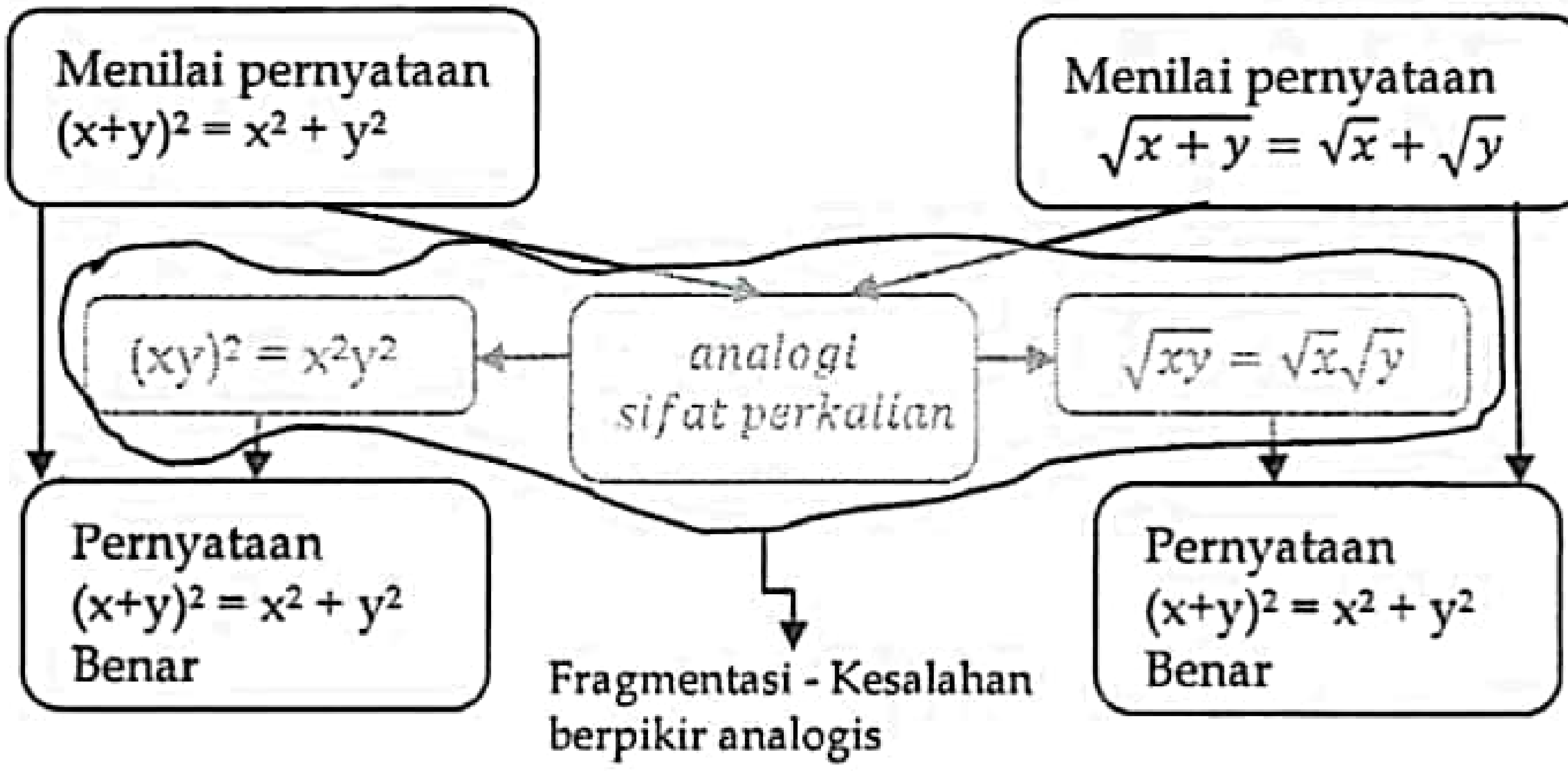
Fragmentasi struktur berpikir siswa berlanjut dalam mengonstruksi konsep operasi aljabar pada masalah 2x + 3y = 5xy. Sebagian siswa menilai pernyataan tersebut benar dengan alasan menjumlahkan dua buku dan tiga pensil hasilnya berupa lima benda berupa buku dan pensil. Sedangkan siswa yang menilai pernyataan 2x + 3y = 5xy sebagai pernyataan salah dengan alasan variabel x dan y menyatakan dua benda yang berbeda sehingga tidak bsa dijumlahkan. Penilaian siswa terhadap dua pernyataan 2x + 3x = 5x dan 2x + 3y = 5xy menggambarkan adanya fragmentasi struktur berpikir yang disebabkan oleh lubang konstruksi. Dalam hal ini jika variabel x dikonstruksi oleh siswa sebagai benda, maka akan berbenturan dengan konstruksi berikutnya, yakni x^2, $\sqrt{x}$, dan sebaginya. Jika x dikonstruksi sebagai buku, maka x^2 dan $\sqrt{x}$ tidak ada maknanya. Fragmentasi struktur berpikir tipe lubang konstruksi dan pseudo konstruksi dalam konsep operasi aljabar dapat digambarkan dengan peta kognitif sebagai berikut.



Fragmentasi struktur berpikir pada aljabar juga terjadi dalam bentuk *mis-analogy thinking* (kesalahan berpikir analogis). Kesalahan berpikir analogis terungkap ketika siswa dihadapkan pada pernyataan $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ dan $(x+y)^2 = x^2 + y^2$ dimana siswa diminta untuk menilai kedua pernyataan tersebut. Adapun pernyataan aljabar yang diberikan seperti berikut.

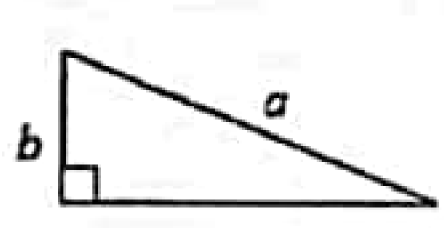
No	Pernyataan	Jawaban		Alasan
		Benar	Salah	
9	$(x+y)^2 = x^2 + y^2$			
13	$\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$			

Siswa menilai pernyataan $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ sebagai pernyataan yang benar dengan alasan "kedua ruas sama-sama tetap memiliki akar, masalah ini sama seperti $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$ ". Siswa juga menilai pernyataan $(x+y)^2 = x^2 + y^2$ sebagai pernyataan yang benar dengan alasan "x bisa dikuadratkan dan y bisa dikuadratkan dan hasilnya ditambah, sehingga menjadi $x^2 + y^2$. Ini sama dengan masalah $(xy)^2 = x^2y^2$". Siswa yang menjawab kedua pernyataan tersebut benar dengan menggunakan alasan berlakunya sifat pada perkalian menunjukkan adanya fragmentasi struktur berpikir tipe "kesalahan berpikir analogis". Fragmentasi struktur berpikir tipe kesalahan berpikir analogis dapat digambarkan sebagai berikut.

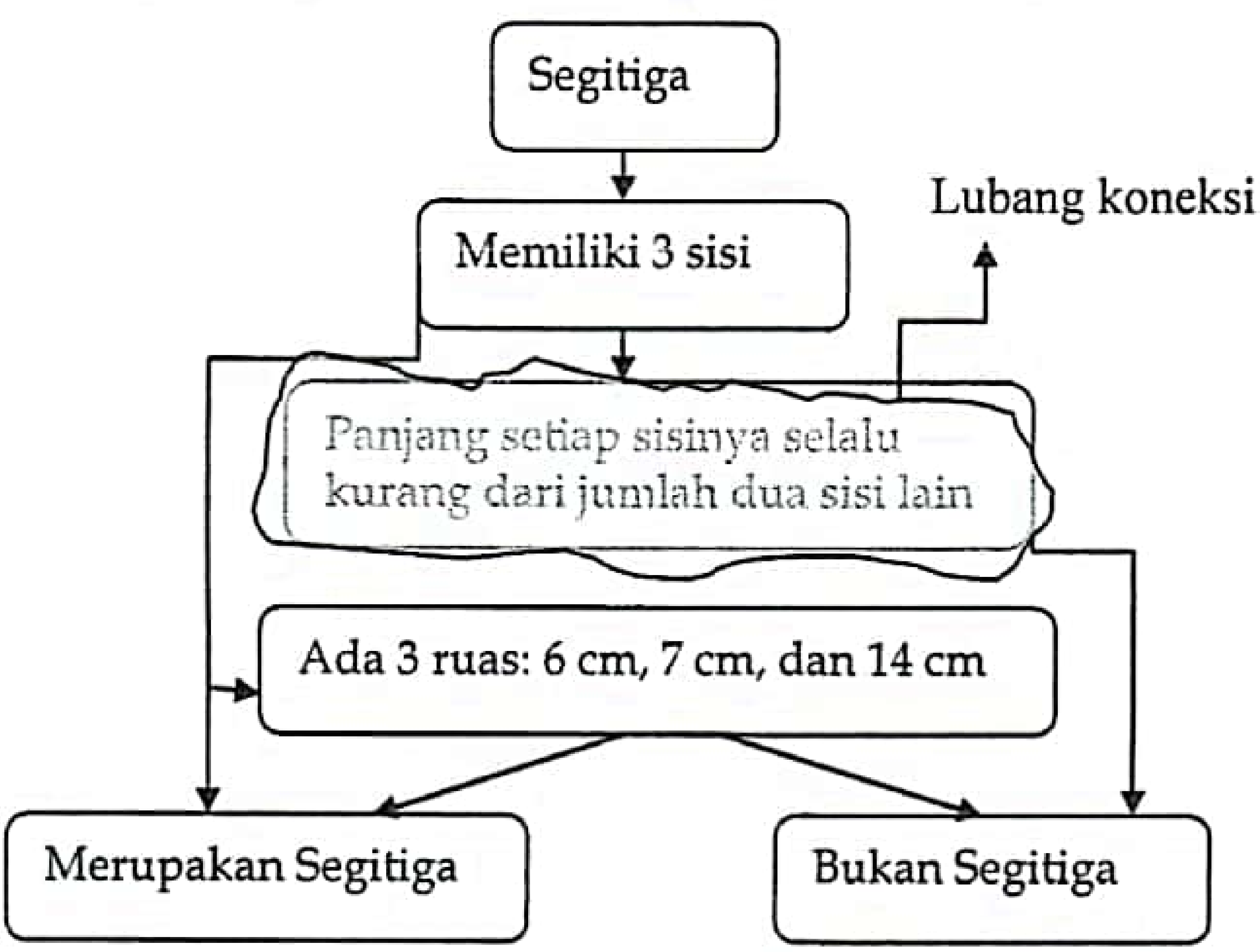


C. Fragmentasi Struktur Berpikir Siswa dalam Mengonstruksi Konsep Geometri

Konsep geometri yang digunakan untuk menelusuri adanya fragmentasi struktur berpikir siswa adalah konsep segitiga, konsep luas daerah, dan teorema phytagoras. Adapun pernyataan yang diberikan kepada siswa untuk dinilai kebenarannya sekaligus dengan memberikan alasan disajikan pada instrumen berikut.

No	Pernyataan	Jawaban		Alasan
		Benar	Salah	
2	Ada segitiga dengan ukuran sisi-sisinya 6 cm, 7 cm, dan 14 cm			
3	Suatu persegi panjang dengan ukuran 6 m x 5 m. Luas daerah persegi panjang tersebut adalah 30 m². Satuan m² diperoleh dari *m* x *m*			
14	Diberikan segitiga siku-siku  Maka berlaku rumus phytagoras: $a^2 + b^2 = c^2$			

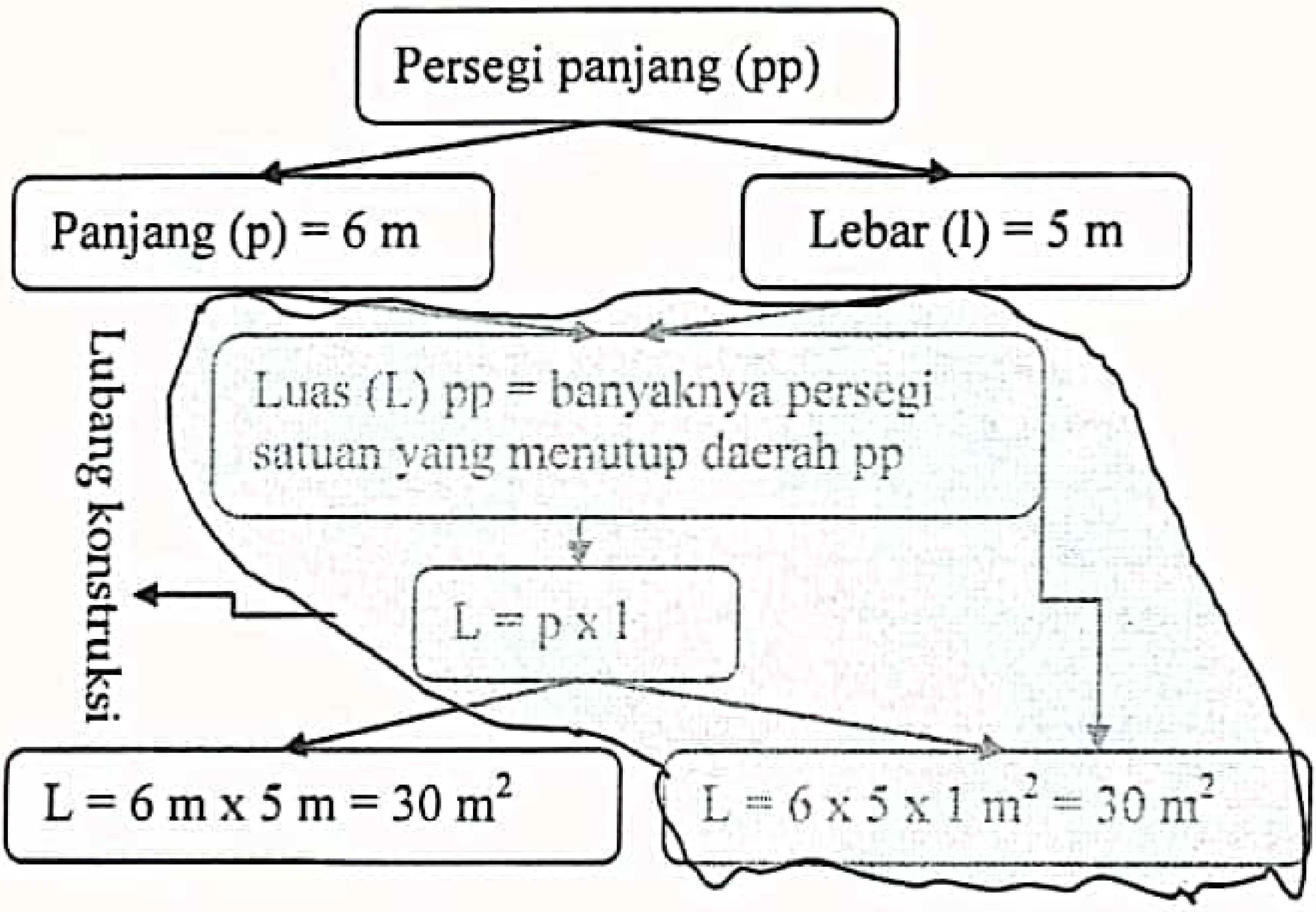
Dalam konsep segitiga, siswa diminta untuk menilai pernyataan "*ada segitiga dengan ukuran sisi-sisinya 6 cm, 7 cm, dan 14 cm*" sekaligus diminta untuk memberikan alasannya. Fragmentasi struktur berpikir yang terjadi pada siswa ketika menilai pernyataan tersebut tergolong pada tipe ketiadaan koneksi. Sebagian besar siswa menilai pernyataan tersebut sebagai pernyataan yang benar, alasanya adalah *segitiga memiliki tiga sisi dan di pernyataan itu sudah ada tiga sisi yang panjangnya 6 cm, 7 cm, dan 14 cm. Jadi segitiga tersebut bisa dibuat.* Dalam hal ini siswa belum mengosntruksi syarat terbentuknya segitiga terkait dengan panjang sisinya. Siswa belum bisa mengaitkan panjang sisi-sisi yang dapat membentuk segitiga. Fragmentasi struktur berpikir yang terjadi adalah tipe ketiadaan koneksi antara sisi segitiga dan konsep segitiga. Bahwa ada syarat terbentuknya segitiga "terkait dengan panjang sisi" tidak terkonstruksi. Framentasi struktur berpikir tipe lubang koneksi terkait dengan konsep segitiga dapat digambarkan dengan peta kognitif sebagai berikut.



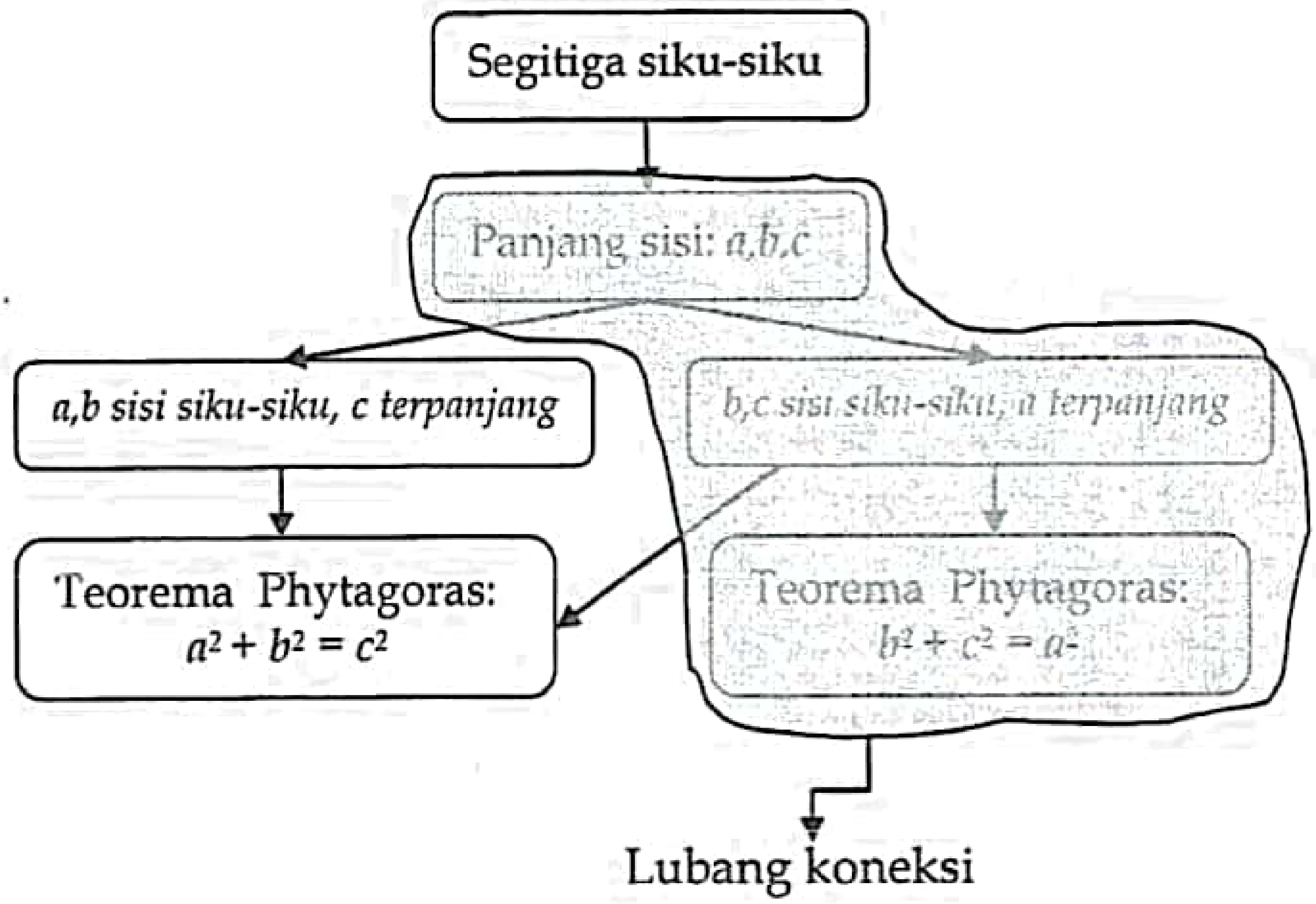
Untuk menelusuri fragmentasi struktur berpikir siswa dalam mengonstruksi konsep luas daerah, kepada siswa diberikan pernyataan "*Suatu persegi panjang dengan ukuran 6 m x 5 m. Luas daerah persegi panjang tersebut adalah 30 m^2. Satuan m^2 diperoleh dari m x m*". Semua siswa menilai pernyataan tersebut sebagai pernyataan benar. Siswa mengetahui maksud dari pernyataan tersebut, bahwa ada persegi panjang dengan ukuran panjang 6 m dan lebarnya 5 m. Siswa memahami luas daerah sebagai panjang dikali lebar, tanpa tahu makna luas. Berikut pernyataan dari siswa (S) ketika diwawancarai oleh peneliti (P).

S : *Pernyataan nomor tiga itu benar.*
P : *Kenapa bisa benar?*
S : *Ya karena rumus luas persegipanjang adalah $p \times l$ sehingga $6m \times 5m$ hasilnya $30m^2$*
P : *Coba perhatikan kalimat terakhir Apakah benar satuan m^2 diperoleh dari $m \times m$. Apakah benar pernyataan ini?*
S : *Iya bisa pak m^2 diperoleh dari $m \times m$*

Berdasarkan proses konstruksi konsep luas daerah, nampak bahwa siswa mengalami fragmentasi struktur berpikir tipe lubang konstruksi. Konsep luas tidak dikonstruksi secara utuh. Siswa menilai pernyataan luas daerah L = 5 m x 6 m = 30 m^2 sebagai pernyataan benar, namun konsep luas daerah yang dikonstruksi adalah salah, satuan m^2 sebagai perkalian m x m. Fragmentasi struktur berpikir tipe lubang konstruksi dapat digambarkan menggunakan peta kognitif seperti berikut.



Fragmentasi struktur berpikir siswa juga terjadi dalam mengonstruksi teorema phytagoras. Masih banyak siswa mengonstruksi teorema phytagoras hanya hafalan "tanpa makna". Mereka hafal bahwa teorema phytagoras ditulis dengan rumus $a^2 + b^2 = c^2$, namun siswa tidak mengaitkan *a, b,* dan *c* dengan sisi-sisi yang bersesuaian di segitiga siku-siku. Siswa tidak mengaitkan pada segitiga siku-siku bahwa *c* sebagai panjang sisi terpanjang (depan sudut siku-siku), dan *a, b* sebagai panjang sisi siku-siku. Ketika sisi-sisi *a, b,* dan *c* pada segitiga siku-siku diubah pisisinya dengan a sebagai panjang sisi terpanjang, *b* dan *c* sebagai panjang sisi siku-siku, maka siswa tetap menuliskan teorema phytagoras sebagai $a^2 + b^2 = c^2$. Hal ini menunjukkan adanya fragmentasi struktur berpikir tipe mis-connection (kesalahan koneksi) dan dalam kasus ini ketiadaan koneksi antara sisi-sisi segitiga siku-siku dan simbol teorema phytagoras. Fragmentasi struktur berpikir ketiadaan koneksi digambarkan sebagai berikut.



D. Fragmentasi Struktur Berpikir Siswa dalam Mengonstruksi Konsep Fungsi dan Himpunan

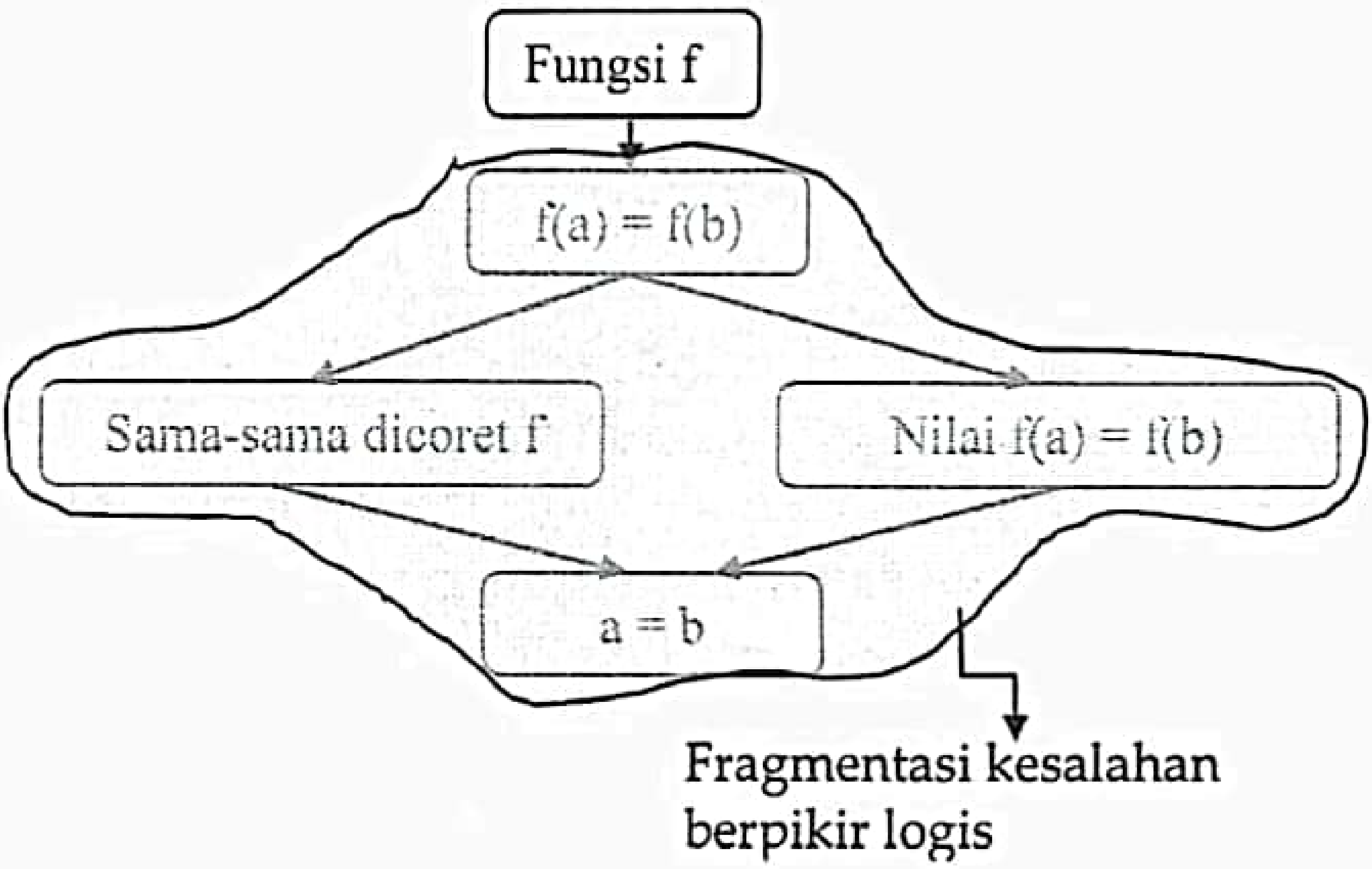
Fragmentasi struktur berpikir siswa dalam mengonstruksi konsep fungsi ditelusuri melalui instrumen berikut.

No	Pernyataan	Jawaban		Alasan
		Benar	Salah	
6	Misalkan f suatu fungsi. Jika f(a) = f(b) maka a = b			

Siswa diminta untuk menilai pernyataan "*Misalkan f suatu fungsi. Jika f(a) = f(b) maka a = b*". Sebagian besar siswa menilai pernyataan tersebut sebagai pernyataan yang benar dengan beberapa alasan, antara lain "*ruas kiri dan ruas kanan sama-sama ada f sehingga bisa dicoret*" dan "*karena nilai fungsi sama yang ditandai dengan f(a) = f(b), maka a harus sama dengan* *b*". Proses berpikir siswa mengalami fragmentasi disebabkan oleh adanya interferensi simbol fungsi dengan perkalian bentuk aljabar. Bentuk f(a) = f(b) terinterferensi dengan bentuk xa = xb, akibatnya siswa mencoret (membagi) x dan konsekuensinya a = b.

Fragmentasi struktur berpikir kedua, sebenarnya sudah disadari oleh siswa bahwa f(a) dan f(b) sebagai nilai fungsi, namun kesimpulan yang ditarik tidak logis "kalau nilai fungsinya sama f(a) = f(b), maka a = b. Logika yang digunakan oleh siswa untuk menarik kesimpulan "kurang jelas". Fragmentasi struktur berpikir seperti ini bisa dikelompokkan pada tipe kesalahan berpikir logis (*mis-logical thinking*).

Fragmentasi struktur berpikir siswa dalam mengonstruksi konsep fungsi dapat digambarkan sebagai berikut.



Fragmentasi struktur berpikir yang serupa terjadi pada masalah himpunan. Penelusuran fragmentasi struktur berpikir dilakukan dengan menggunakan instrumen sebagai berikut.

No	Pernyataan	Jawaban		Alasan
		Benar	Salah	
12	Jika $A \subset C$ *dan* $B \subset C$, maka $A = B$			

Siswa diminta menilai pernyataan "*Jika* $A \subset C$ *dan* $B \subset C$, *maka* $A = B$". Siswa menilaia pernyataan tersebut sebagai pernyataan yang benar dengan alasan "karena sama-sama bagian dari C, maka A = B". Pola penarikan kesimpulan yang dilakukan oleh siswa tidak memiliki dasar yang jelas. Karena itu fragmentasi struktur berpikir yang terjadi bertipe kesalahan berpikir logis.

BAB IV
TEORI DEFRAGMENTASI STRUKTUR BERPIKIR DALAM MENGONSTRUKSI KONSEP MATEMATIKA

Defragmentasi struktur berpikir dilakukan untuk memperbaiki fragmentasi berpikir seperti yang tergambar di Bab III. Fragmentasi struktur berpikir merupakan fenomena penyimpanan informasi di dalam otak yang tidak efisien sehingga menghambat proses konstruksi konsep dan pemecahan masalah matematika. Fragmentasi struktur berpikir ada lima tipe: *pseudo contsruction*, lubang konstruksi, lubang koneksi, kesalahan berpikir logis, dan kesalahan berpikir analogis.

Defragmentasi struktur berpikir merupakan fenomena perubahan tatanan skema (struktur berpikir) dalam rangka memperbaiki fragmentasi struktur berpikir. Defragmentasi dapat terjadi dalam dua bentuk, yakni secara alami dan secara disengaja dengan memberikan intervensi. Defragmentasi secara alami terjadi melalui proses belajar dan pengalaman hidup. Proses defragmentasi alami ini berlangsungnya membutuhkan waktu yang lama dan tidak semua fragmentasi dapat diperbaiki dengan defragmentasi alami. Karena itu diperlukan defragmentasi "yang disengaja"dengan intervensi. Buku ini menyajikan defragmentasi struktur berpikir yang disengaja dengan memberikan intervensi kepada siswa untuk menata kembali struktur berpikirnya dalam mengonstruksi konsep matematika dan pemecahan masalah.

Defragmentasi struktur berpikir siswa dapat dikelompokkan menjadi 4 (empat) macam: pemunculan skema (*schema appearences*), perajutan skema (*schema knitting*), perbaikan berpikir logis, dan perbaikan berpikir analogis. Pemunculan skema digunakan untuk memperbaiki fragmentasi struktur berpikir tipe konstruksi semu dan lubang konstruksi. Perajutan skema digunakan untuk memperbaiki fragmentasi struktur berpikir tipe lubang koneksi (*connection hole*). Perbaikan berpikir logis digunakan untuk memperbaiki fragmentasi struktur berpikir tipe kesalahan dalam berpikir logis (*mis-logical thinking*). Perbaikan berpikir analogis dilakukan untuk memperbaiki kesalahan berpikir analogis (*mis-analogical thinking*).

Defragmentasi struktur berpikir dilakukan dengan tiga proses utama, yakni *scaffolding*, pengondisian disequilibrasi, dan *conflict cognitive*. *Scaffolding* merupakan aktifitas intervensi dengan memberikan bantuan secukupnya kepada siswa. Disequilibrasi pada dasarnya terjadi pada diri pebelajar (siswa) dan dapat dimunculkan dengan memberi-kan intervensi untuk merefleksikan hasil konstruksinya termasuk menelusuri dan membandingkan hasil kerjanya dengan konsep ilmiah. Ketika intervensi yang dilakukan dapat menimbukan pertentangan dengan konsep ilmiah dan disadari oleh siswa, maka siswa mengalami *conflict cognitive*. Karena itu *conflict cognitive* merupakan bagian dari *scaffolding* dan disequilibrasi. *Conflict cognitive* dapat terjadi salah, satunya dengan adanya intervensi dari pembelajar (orang yang lebih dewasa). *Conflict cognitive* seringkali efektif untuk menyadarkan siswa akan adanya fragmentasi struktur berpikir pada dirinya. Selanjutnya buku ini membahas proses defragmentasi struktur berpikir (pemunculan skema (*schema appearances*), perajutan skema (*schema knitting*), perbaikan berpikir logis, dan perbaikan berpikir analogis) dengan menggunakan tiga jenis proses intervensi, yakni: *scaffolding*, pengondisian disequilibrasi, dan *conflict cognitive*.

A. Defragmentasi Struktur Berpikir tipe Pemunculan Skema Berpikir (*Schema Appearances*)

Defragmentasi pemunculan skema berpikir dilakukan untuk memperbaiki fragmentasi struktur berpikir siswa dalam mengonstruksi konsep matematika tipe pseudo konstruksi dan lubang konstruksi. Fragmentasi struktur berpikir siswa dalam mengonstruksi konsep bilangan bulat terjadi dalam bentuk pseudo contruction dan lubang konstruksi, di mana siswa bisa menjawab secara benar -4 – (-3) = -1, namun alasan yang dibuat siswa masih salah. Kebanyakan siswa menganalogikan tanda negatif dengan hutang dan sebagian yang lain mengklaim bahwa negatif ketemu negatif sama dengan positif.

Siswa merasa mulai mengalami masalah ketika menghadapi pernyataan -4 -(-3) = -1. Konsep negatif dan operasi "kurang" direpresentasikan dengan "hutang" tidak bisa dipraktikkan pada masalah -4 – (-3). Dikurangi dengan negatif 3 tidak bisa direpresentasikan dengan hutang (hutang 3), karena tidak ada konsep hutang (hutang). Kebuntuan berpikir menyebabkan subjek mengubah pola pikirnya dengan membuat alasan pembenaran: (1) negatif ketemu negatif hasilnya positif; (2) minus ketemu minus hasilnya plus; (3) negatif dikali negatif hasilnya positif; atau (4) minus dikali minus hasilnya plus.

S: Benar karena tanda negatif kalau ketemu negatif kan jadinya positif. Jadi operasi ini negatif 4 ditambah 3 jadinya kan negatif 1."

P: Kenapa negatif ketemu negatif kok jadi positif?

S: Biasanya begitu

P: Mungkinkah dengan garis bilangan?

S: Pakai garis bilangan. Jadi menghitungnya dari negatif 4 terus ditambah 3 ini berati dari negatif 3 berjalan ke kanan 3 langkah jadinya negatif 1."

P: Tadi yang menjadi masalah, kenapa dikurangi dengan bilangan negatif kok sama dengan dijumlahkan dengan bilangan positif?

S: Saya bingung. Karena biasanya begitu

Keempat alasan pembenaran tersebut tidak dilandasi oleh konsep matematika yang benar. Pembenaran harus dilakukan oleh subjek agar langkah berikutnya bisa dilakukan. Karena subjek akan mengalami kebuntuan manakala tidak ada pembenaran tersebut. Meskipun hasil akhirnya benar, namun konsep yang dikonstruksi oleh siswa masih semu, sehingga disebut *pseudo konstruksi*.

Dalam membangun konstruksi konsep operasi bilangan bulat, subjek tidak menggunakan garis bilangan sebagai dasarnya. Mereka lebih banyak menggunakan analogi "hutang" sebagai representasi bilangan negatif. Subjek juga merepresentasikan operasi dan lambang bilangan sebagai sesuatu yang sama, yakni "hutang". Akibatnya subjek tidak bisa memberi alasan ketika ada pernyataan "dikurangi dengan bilangan negatif". Mereka hanya membuat pembenaran bahwa negatif ketemu negatif hasinya positif atau negatif dikalikan negatif hasilnya positif. Padahal dalam operasi bilangan bulat yang bisa dikalikan hanya bilangan, tidak ada konsep perkalian bilangan dengan operasi.

Fragmentasi struktur berpikir dalam bentuk konstruksi semu tersebut dapat diperbaiki dengan melakukan defragmentasi struktur berpikir melalui *conflict cognitive* dilanjutkan dengan pemberian *scaffolding*. *Conflict cognitive* dilakukan dengan mengajukan beberapa pertanyaan yang dapat menimbulkan conflict dalam berpikir siswa. Dalam hal ini *conflict cognitive* hanya digunakan untuk menyadarkan adanya kesalahan dalam proses konstruksi.

P: *Kamu memisalkan -4 sebagai hutang 4, -3 sebagai hutang 3, begitupula dikurangi 3 sebagai hutang 3. Itu ide bagus, namun bagaimana kalau "dikurangi negatif 3" atau – (-3). Apa artinya?*

S: *Ehm...* (siswa berpikir lama sambil bergumam). *Kalau hutang hutang 3 kok jadi tambah 3 ya. Saya bingung... tapi biasanya begitu*

Dialog tersebut menunjukkan adanya *conflict cognitive*. Berpikir siswa mulai "terkoyak", dimana ada kesenjangan antara asimilasi dan akomodasi atau sering disebut disequilibrasi. Siswa meragukan berpikirnya selama ini, namun masih bingung tidak tahu harus menggunakan langkah mana yang dirasakan masuk akal.

Dengan adanya disequilibrasi akan mempermudah dilakukan ***scaffolding***. Keraguan siswa terhadap konsep yang dikonstruksi selama ini menjadi modal dasar untuk melakukan perubahan struktur berpikir. Siswa akan lebih memilih berpikir yang "masuk akal", karena itu pemberian *scaffolding* akan mudah dilakukan untuk mengubah konstruksi konsep siswa. Dalam hal ini *scaffolding* dilakukan dengan mengarahkan siswa untuk menggunakan pola bilangan melalui pengajuan beberapa pertanyaan seperti berikut.

P: *Adakah cara lain untuk menyelesaikannya? Bagaimana kalau kamu membuat pengurangan seperti ini:*

-4 – 2 = -6
-4 – 1 = -5
-4 – 0 = -4
-4 – (-1) = ...

Bisakah melanjutkan ini dan memberi alasannya?

S: Oh ya. -4 – (-1) = -3 (karena bertambah 1 dari -4)
-4 – (-2) = -2 (karena bertambah 1 dari -3)
-4 – (-3) = -1 (karena bertambah 1 dari -2)

P: Jadi apa alasan dikurangi dengan bilangan negatif sama dengan ditambah lawannya?

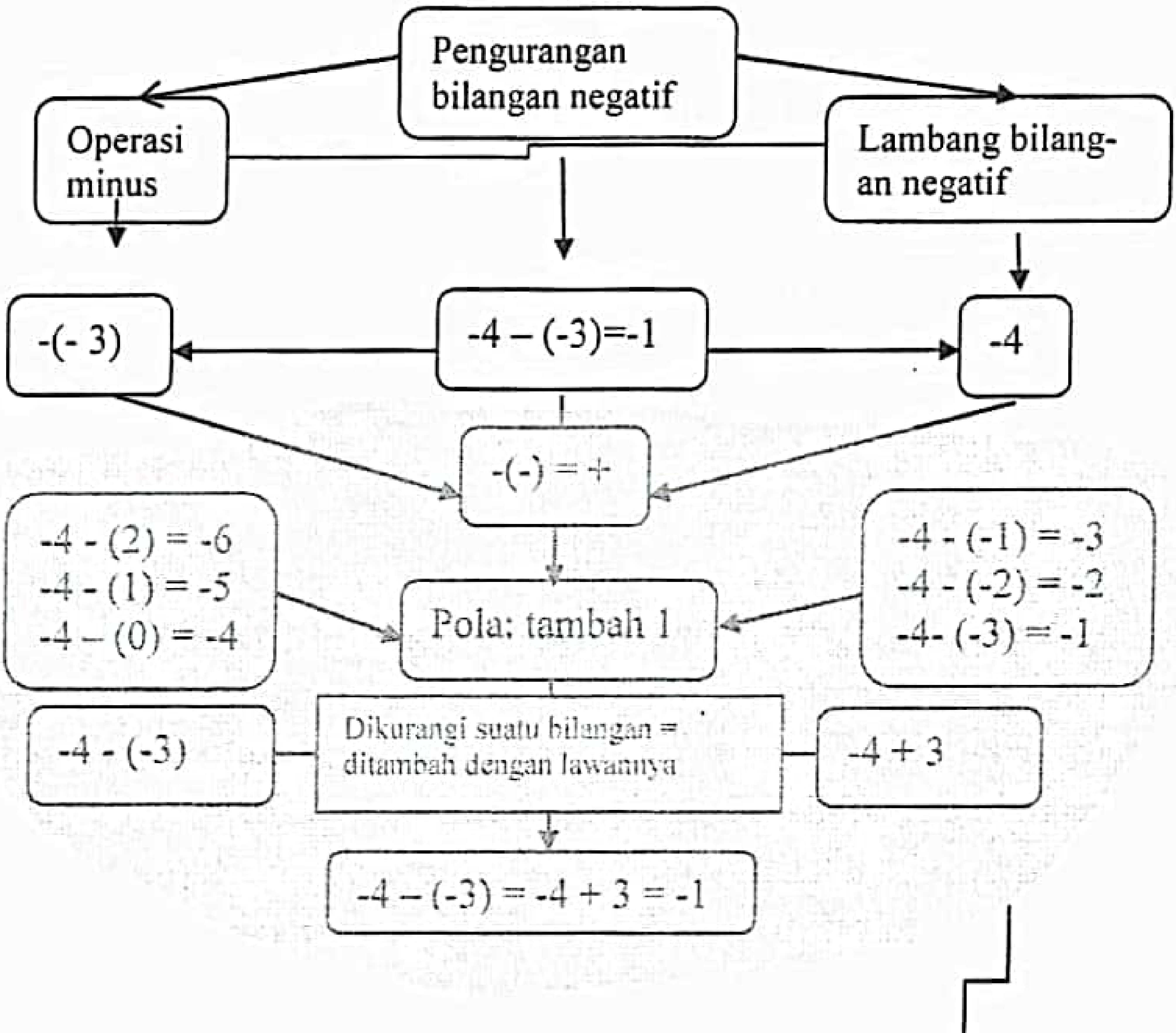
S: Oh.. gitu ya. Saya sekarang tahu alasannya. Dikurangi dengan bilangan negatif sama dengan ditambah lawannya

Dari pola-pola tersebut, ketika pengurangnya berkurang satu (dari 3 ke 2; dari 2 ke 2; dan seterusnya) hasilnya bertambah 1 (dari 1 ke 2; dari 2 ke 3; dan seterusnya). Berdasarkan pola tersebut diperoleh

4 – (-1) = 5 ekivalen dengan 4 + 1 = 5
4 - (-2) = 6 ekivalen dengan 4 + 2 = 6
4 - (-3) = 7 ekivalen dengan 4 + 3 = 7

Berarti "**dikurangi dengan suatu bilangan sama dengan "ditambah dengan lawan bilangan tersebut"**

Defragmentasi struktur berpikir dengan "memunculkan skema pola bilangan" dapat mengubah struktur berpikir siswa. Skema yang kosong menjadi muncul (s*chema appearances*). Kemunculan skema pola bilangan dirasakan oleh siswa lebih masuk akal dan pola bilangan tersebut dapat dikembangkan untuk konteks yang lebih luas dalam proses penyelesaian masalah. Dalam hal ini siswa akan mengalami perubahan struktur berpikir, semula berpikir tentang representasi bilangan dan operasi sebagai hutang, berubah menjadi "konsep keteraturan pola bilangan" yang lebih masuk akal. Struktur berpikir siswa setelah dilakukan defragmentasi struktur berpikir dapat digambarkan sebagai berikut.



Schema Appearances

Pemunculan skema juga terjadi pada fragmentasi struktur berpikir siswa dalam mengosntruksi konsep operasi aljabar. Siswa mengalami "berpikir semu dalam mengonstruksi konsep operasi aljabar" atau disebut dengan pseudo konstruksi. Subanji (2015) menjelaskan pseudo konstruksi meliputi pseudo konstruksi "benar" dan pseudo konstruksi "salah". Dalam konstruksi operasi aljabar ini siswa mengalami pseudo konstruksi "benar". Ketika siswa dihadapkan pada pernyataan aljabar 2x + 3x = 5x, siswa menilai pernyataan tersebut merupakan pernyataan benar, namun ketika ditelusuri lebih lanjut, siswa salah dalam menjustifikasi jawabannya. Alasan siswa menjawab benar pernyataan "2x + 3x = 5x" karena *x* diilustrasikan sebagai benda. Sebagai contoh subjek S2, S3, dan S4 mengilustrasikan variabel x dengan benda "buku" dan "apel" seperti berikut.

S2: benar. karena sama-sama x jadi x bisa dijumlahkan. Kalau sama-sama buku dan buku jadi 2 buku ditambah 3 buku sama dengan 5 buku

S3: benar. Karena kedua variabelnya sama. Jadi bisa dijumlahkan. Kalau misalkan x itu buku berarti 2 buku ditambah 3 buku jadi ada 5 buku

S4: benar, ya kita misalkan saja x itu benda, misalnya benda itu apel maka 2 apel ditambah 3 apel samadengan 5 apel

Adanya fragmentasi nampak jelas ketika peneliti menelusuri lebih lanjut dengan melakukan *indept interview* kepada subjek. Dengan mengajukan pertanyaan kepada ketiga subjek tersebut, subjek tetap yakin bahwa pemisalan mereka adalah benar. Berikut dialog antara peneliti dan subjek.

P: apakah Anda yakin bahwa x bisa digantikan oleh buku atau apel?

S2, S3, S4: ya Pak (menjawab serentak)

P: kenapa?

S2: ya jelas kan Pak bahwa dua buku ditambah dengan tiga buku hasilnya ya lima buku

S3: Ya Pak saya setuju dengan S2 memang biasanya kita memperoleh pelajaran seperti itu, dua buku ditambah tiga buku sama dengan lima buku.

S4: pada dasarnya sama juga sama, hanya pemisalan saya x sebagai apel, sehingga dua apel ditambah dengan tiga apel sama dengan lima apel.

Untuk melakukan defragmentasi struktur berpikir "pemunculan skema", terlebih dahulu peneliti memunculkan *conflict cognitive* pada berpikir siswa. *Conflict cognitive* dibangun berdasarkan berpikir siswa, yakni variabel x diinterpretasi sebagai buku atau apel. Peneliti memberikan pancingan pertanyaan untuk menumbuhkan *conflict cognitive,* sebagai berikut.

P: pernahkah Anda mengetahui ada bentuk x^2 atau $\sqrt{x}$?
S2, S3, S4: Ya pak sering (subjek menjawab serentak)
P: di mana Anda temukan?
S2, S3, S4: di matematika materi aljabar.
P: Kamu juga pernah menemukan masalah $x^2 + x^2$?
S2, S3, S4: pernah
P: kalau kamu tadi memisalkan x sebagai buku atau apel, bagaimana dengan x^2 dan $\sqrt{x}$, apa makna x^2 dan $\sqrt{x}$?
S2, S3, S4 (diam lama): tapi biasanya diilustrasikan seperti itu oleh guru saya
P: kalau x sebagai buku, menjadi apa x^2 $\sqrt{x}$? Apakah buku kuadrat dan akar buku?
S2, S3, S4: ehm... iya salah

Berdasarkan dialog tersebut terlihat bahwa siswa awalnya sangat yakin bahwa jawabannya benar (meskipun sebenarnya salah) dan dengan diberikan *conflict cognitive* siswa mengalami *disequlibrasi* yang ditandai dengan diam lama dan bingung. Setelah siswa mengalami *conflict cognitive,* mulailah dia memikirkan ulang apa yang telah dipelajari dan akhirnya menyadari bahwa apa yang dikonstruksi selama ini salah.

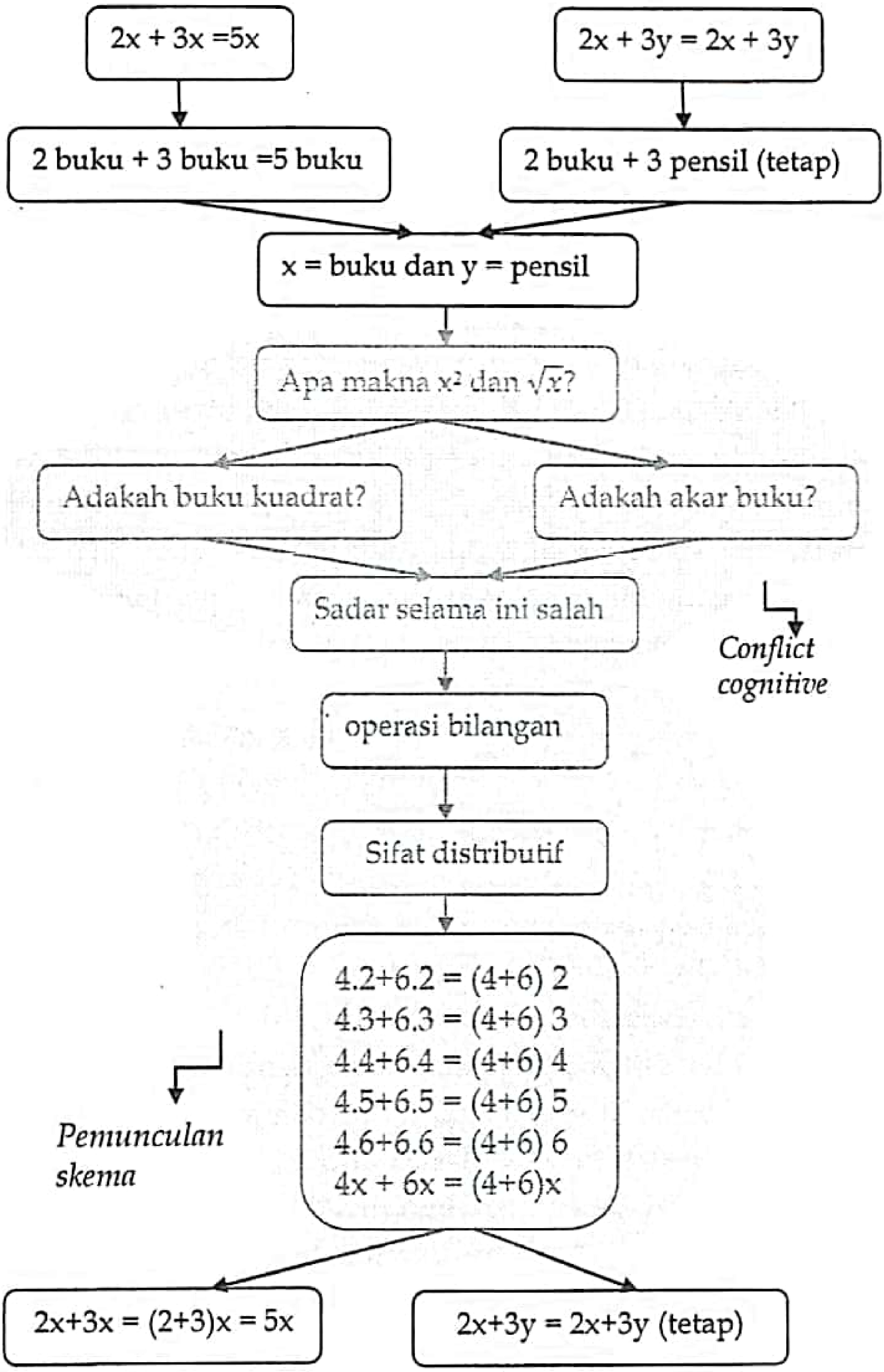
Penataan struktur berpikir siswa dilakukan dengan defragmentasi struktur berpikir tipe "memunculkan skema", yakni dengan memberikan *scaffolding*.

P: coba pikirkan bagaimana cara menyelesaikan masalah ini: 4 . 7 + 6 . 7?
S: 4 . 7 = 28 dan 6 . 7 = 42. Jadi hasilnya 3 . 7 + 6 . 7 = 28 + 42 = 70
P: adakah cara lainnya?
S: ehm... (siswa diam lama, kelihatan bingung)
P: masih ingat sifat-sifat operasi bilangan?
S: ehm... apakah komutatif itu Pak?
P: boleh, seperti apa komutatif itu?
S: contohnya $a + b = b + a$
P: bagus. Adakah sifat yang lain? Bisa memberi contoh?
S: distributif. Contohnya $(a+b)c = ac+bc$
P: kalau menggunakan sifat distributif, bisakah soal tadi diselesaikan?
S: bisa Pak. 4 . 7+6 . 7 = (4+6) . 7 = 10 . 7 = 70
P: Coba kamu selesaikan, soal-saoal saya ini!: (1) 4 . 2 + 6 . 2 = ...; (2) 4 . 3 + 6 . 3 = ...; (3) 4 . 4 + 6 . 4 = ...; (4) 4 . 5 + 6 . 5 = ...; dan (5) 4 . 6 + 6 . 6 = ...
S: (1) 4 . 2 + 6 . 2 = (4+6) . 2 = 10 . 2 = 20
(2) 4 . 3 + 6 . 3 = (4+6) . 3 = 10 . 3 = 30
(3) 4 . 4 + 6 . 4 = (4+6) . 4 = 10 . 4 = 40
(4) 4 . 5 + 6 . 5 = (4+6) . 5 = 10 . 5 = 50
(5) 4 . 6 + 6 . 6 = (4+6) . 6 = 10 . 6 = 60
P: Bagaimana $2x + 3x$? Bagaimana menyelesaikannya?
S: oh ya Pak. $2x + 3x = (2+3)x = 5x$. Iya ini yang benar. Berarti selama ini saya salah
P: Coba kalau $5y + 4y$ berapa hasilnya?
S: $9y$
P: kenapa?
S: karena $5y + 4y = (5+4)\ y = 9y$
P: Terus bagaimana dengan $2x + 3y$? Bisakah dijumlahkan?

S: tidak
P: Kenapa
S: karena tidak bisa dikelompokkan. Tidak memenuhi sifat distributif

Berdasarkan dialog tersebut nampak bahwa *conflict cognitive* dan *scaffolding* dapat memunculkan skema berpikir siswa terkait dengan operasi aljabar. Defragmentasi struktur berpikir dilakukan dengan penataan dan perbaikan struktur berpikir siswa. Dalam hal ini ada beberapa proses penataan struktur berpikir (defragmentasi struktur berpikir tipe pemunculan skema. *Pertama*, pada awalnya siswa menginterpretasi variabel sebagai benda (buku, pensil, apel) dan berubah menjadi bilangan (variabel dalam semestanya bilangan). Siswa menyadari bahwa konstruksi variabel yang selama ini dimilikinya adalah salah, seharusnya bukan benda tetapi bilangan. *Kedua*, operasi aljabar yang dilakukan, semula berkaitan dengan menjumlahkan banyak benda (2 buku ditambah 3 buku menjadi 5 buku) berubah menjadi penggunaan sifat-sifat operasi bilangan (distributif). Bentuk aljabar $2x + 3x$ bisa dijumlahkan menjadi $5x$ karena memenuhi sifat distributif, yakni $2x + 3x = (2+3)x = 5x$. *Ketiga*, dalam penyederhanaan bentuk aljabar, bentuk aljabar $2x + 3y$ tidak bisa disederhanakan, semula dengan alasan karena bendanya berbeda (x sebagai buku dan y sebagai pensil), akhirnya berubah dengan alasan karena tidak ada sifat operasi yang sesuai, yakni tidak bisa dilakukan pengelompokan. Adanya perubahan struktur berpikir tersebut menunjukkan bahwa defragmentasi struktur berpikir siswa telah mengubah konstruksi konsep operasi aljabar.

Defragmentasi struktur berpikir tipe pemunculan skema dapat digambarkan sebagai berikut.


2x + 3x =5x
2x + 3y = 2x + 3y
2 buku + 3 buku =5 buku
2 buku + 3 pensil (tetap)
x = buku dan y = pensil
Apa makna x² dan √x?
Adakah buku kuadrat?
Adakah akar buku?
Sadar selama ini salah
Conflict cognitive
operasi bilangan
Sifat distributif
4.2+6.2 = (4+6) 2
4.3+6.3 = (4+6) 3
4.4+6.4 = (4+6) 4
4.5+6.5 = (4+6) 5
4.6+6.6 = (4+6) 6
4x + 6x = (4+6)x
Pemunculan skema
2x+3x = (2+3)x = 5x
2x+3y = 2x+3y (tetap)

Defragmentasi struktur berpikir tipe pemunculan skema dapat dilakukan juga dalam mengatasi fragmentasi konstruksi konsep luas daerah. Fragmentasi struktur berpikir siswa berupa konstruksi pseudo siswa mengonstruksi luas daerah hanya sekedar prosedur saja. Ketika dihadapkan pada masalah

> *Suatu persegi panjang dengan ukuran 6 m x 5 m. Luas daerah persegi panjang tersebut adalah 30 m^2. Satuan m^2 diperoleh dari m x m*

Hampir semua siswa menilai bahwa satuan m^2 diperoleh dari mxm. Meskipun siswa bisa menentukan luas daerah persegi panjang L = 6 m x 5 m = 30 m^2, namun siswa tidak memahami makna luas. Siswa hanya hafal bahwa luas daerah sebagai perkalian panjang dengan lebar yang biasa ditulis L = p x l. Hal yang penting bagi siswa dalam menentukan luas adalah mengalikan dua bilangan yang mewakili panjang dan lebar dari suatu persegi panjang. Siswa tidak memperdulikan makna luas, karena dalam proses pembelajaran hanya ditekankan pada prosedur dan latihan soal sebanyak-banyaknya (meskipun tidak bermakna).

Defragmentasi struktur berpikir siswa dilakukan dengan pemunculan skema konsep luas daerah melalui *scaffolding*. Pemunculan skema dengan *scaffolding* dilakukan dengan mengarahkan siswa pada konsep luas melalui konsep luas tidak baku terlebih dahulu.

P: *Kalau kita memiliki persegi panjang dengan ukuran 6 m x 5 m dan ingin menutupinya dengan persegi panjang kecil berukuran 1 m x 6 m, berapa persegi panjang kecil yang dibutuhkan? Boleh kamu gambar*

S: *ehm...* (Siswa menggambar persegi panjang dan menghitung jumlah persegi panjang).. *ada 5 persegi panjang berukuran 1 m x 6 m.*

P: *Kalau kita ingin menutupi persegi panjang tersebut dengan segitiga siku-siku dengan alasnya 1 m dan tingginya 6 m, berapa banyak segitiga siku-siku yang diperlukan?*

S: *ehm..* (siswa berpikir agak lama dan menggambar lagi persegi panjang serta segitiga yang diperlukan untuk menutup)... *perlu sepuluh segitiga siku-siku.*

P: *Kalau kita ingin menutup persegi panjang tersebut dengan persegi panjang kecil 1 m x 5 m, berapa persegi panjang kecil yang diperlukan?*

S: *enam persegi kecil (siswa menjawab dengan cepat, tanpa menggambar)*

P: *Dari kasus-kasus tersebut, kita dapat menyebut bahwa luas daerah persegi panjang dengan ukuran 6 m x 5 m adalah* ***lima persegi kecil (1 m x 6 m)*** *atau* ***sepuluh segitiga siku-siku*** *atau* ***enam persegi panjang kecil (1 m x 5m)****. Sekarang kalau saya ingin menutup persegi panjang dengan 6 m x 5 m menggunakan persegi berukuran 1 m x 1 m, berapa persegi yang dibutuhkan? Boleh kamu gambar*

S: *ehm...* (siswa berpikir agak lama sambil menggambar)... *Ada 30 persegi kecil 1 m x 1 m*

Dari dialog tersebut nampak bahwa siswa sudah memahami bahwa luas daerah persegi panjang dengan ukuran 6 h bisa mengonstruksi konsep luas daerah tidak baku. Untuk melengkapi proses konstruksi luas daerah tersebut peneliti melanjutkan dengan melakukan dialog untuk membentuk konsep persegi satuan.

P: *Kalau dikaitkan dengan masalah luas daerah dengan ukuran 6 m x 5 m di atas, bisakah kamu jelaskan apa makna satuan meter persegi?*

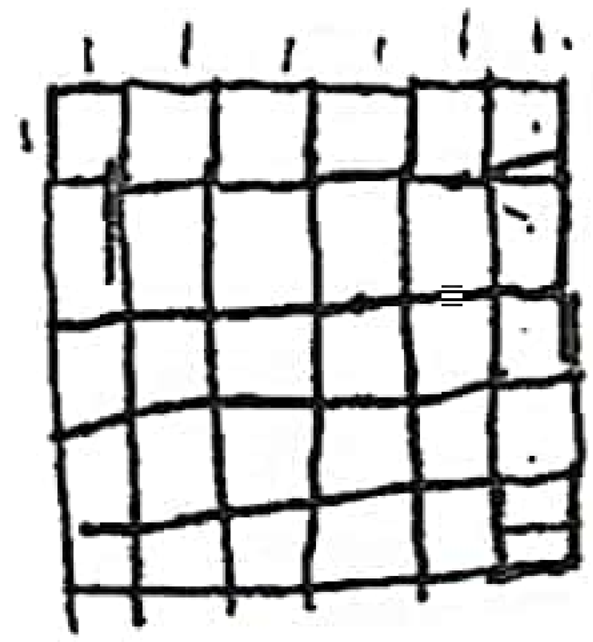
S: (siswa berpikir lama) *apa ya... mungkin persegi itu merupakan bangun persegi yang menutup..*

P: *berarti 30 m^2 apa?*

S: *mungkin banyaknya persegi ada 30* (siswa menjawab tetapi dengan ragu-ragu)

P: *Ya betul jawaban kamu, terus bagaimana dengan satuan m^2? Apakah perkalian mxm?*

S: *Bagaimana ya, saya jadi ragu-ragu, kayaknya bukan. Tapi saya tidak tahu*

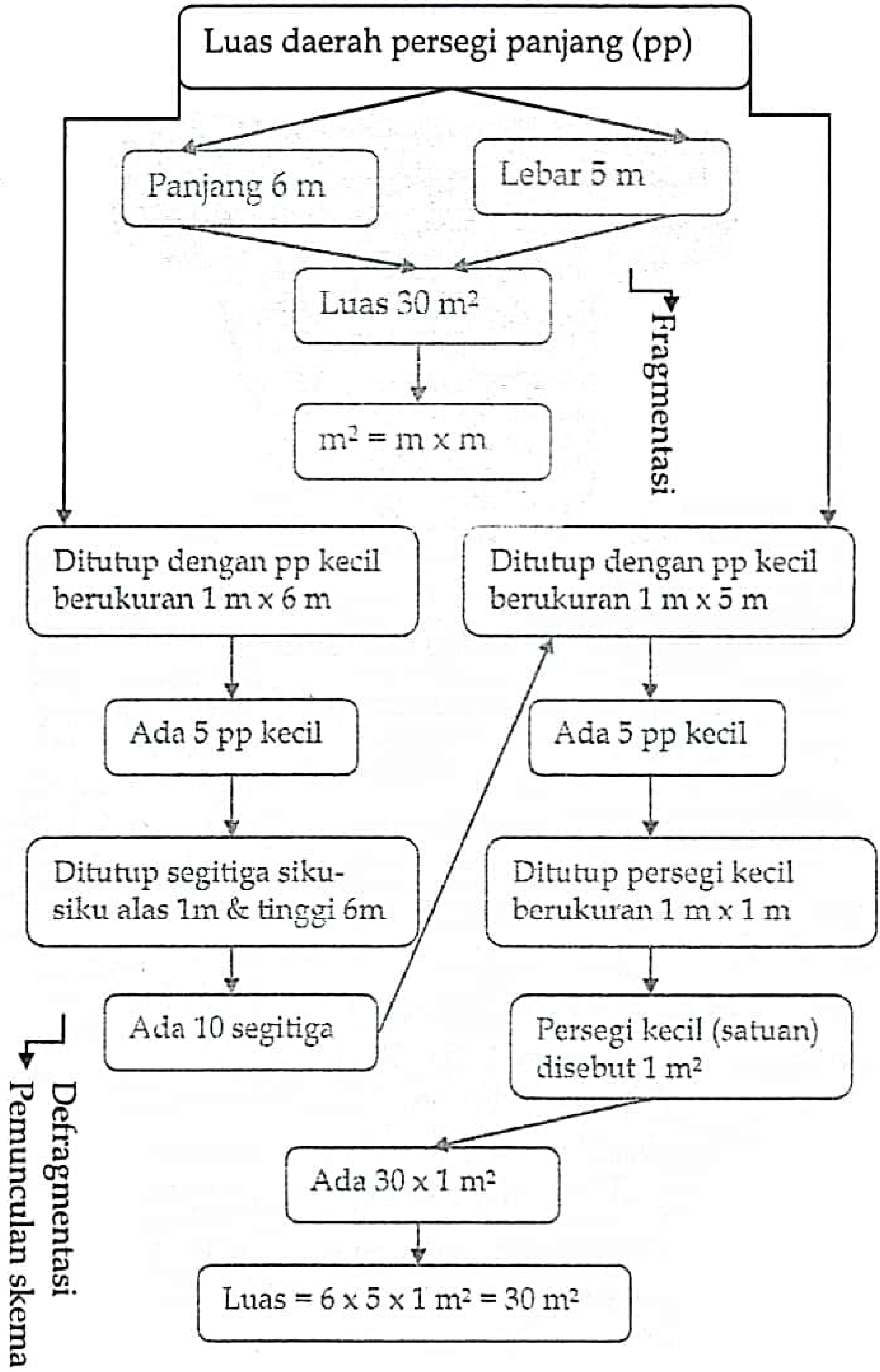


P: *Baik. m^2 itu menandakan persegi satuan berukuran 1 m x 1 m. Kalau ditutup dengan persegi berukuran 1 m x 1 m, maka penutupnya disebut persegi satuan 1 m^2, Jadi luas daerah persegi panjang tersebut adalah 6 x 5 x 1 m^2 = 30 m^2. Sekarang menurut kamu, apakah makna satuan m^2 merupakan mxm? Coba jelaskan kepada saya*

S: *m^2 bukan mxm, tetapi menyatakan persegi kecil berukuran 1m x 1m.*

P: *Bagus. Itu yang disebut dengan persegi satuan*

Dari dialog tersebut nampak bahwa siswa sudah mengalami restrukturisasi berpikirnya, sudah terjadi defragmentasi struktur berpikir. Siswa sudah mengubah konsep satuan luas daerah dan sudah mengalami perubahan terkait dengan makna satuan luas daerah. Satuan luas yang semula dikonstruksi sebagai perkalian satuan panjang sudah berubah menjadi konsep persegi satuan yang dapat menutup suatu daerah. Defragmentasi struktur bepikir tipe pemunculan skema berpikir siswa dalam mengonstruksi konsep luas daerah dan satuan luas dapat digambarkan seperti berikut.


Luas daerah persegi panjang (pp)
Panjang 6 m
Lebar 5 m
Luas 30 m²
m² = m x m
Fragmentasi
Ditutup dengan pp kecil berukuran 1 m x 6 m
Ditutup dengan pp kecil berukuran 1 m x 5 m
Ada 5 pp kecil
Ada 5 pp kecil
Ditutup segitiga siku-siku alas 1m & tinggi 6m
Ditutup persegi kecil berukuran 1 m x 1 m
Ada 10 segitiga
Persegi kecil (satuan) disebut 1 m²
Ada 30 x 1 m²
Luas = 6 x 5 x 1 m² = 30 m²
Defragmentasi
Pemunculan skema

B. Defragmentasi Struktur Berpikir tipe Perajutan Skema *(Schema Knitting)*

Defragmentasi struktur berpikir tipe perajutan skema salah satunya digunakan untuk memperbaiki fragmentasi berpikir siswa dalam mengonstruksi konsep segitiga dan konsep triple phytagoras. Fragmentasi struktur berpikir dalam mengonstruksi konsep segitiga tergambar dari penilaian siswa terhadap pernyataan berikut.

"Ada segitiga dengan ukuran sisi-sisinya 6 cm, 7 cm, dan 14 cm"

Sebagian besar siswa menilai bahwa pernyataan tersebut bernilai benar. Hal ini didasari oleh pemikiran bahwa dalam mengonstruksi segitiga yang terpenting adalah ada tiga sisi, setiap ada tiga sisi selalu bisa dibuat segitiga. Siswa tidak mengaitkan panjang ketiga sisi tersebut, sehingga tidak ditemukan syarat lain untuk terbentuknya segitiga.

Defragmentasi struktur berpikir siswa dilakukan dengan memunculkan koneksi panjang sisi segitiga dengan gambar segitiga. Koneksi antara panjang sisi segitiga dan gambar segitiga dapat digunakan untuk membangun konsep syarat terbentuknya segitiga. Defragmentasi struktur berpikir dilakukan dengan menimbulkan disequilibrasi pada berpikir siswa sehingga siswa bisa memperbaiki sendiri struktur berpikirnya melalui dialog seperti berikut.

P: apa alasan Kamu membenarkan pernyataan bahwa ada segitiga dengan sisi-sisi 6 cm, 7 cm, dan 14 cm?

S: karena lengkap ada tiga sisi

P: kalau ada tiga sisi apa pasti bisa dibuat segitiga?

S: Iya

P: *Coba saya minta tolong digambarkan segitiga dengan sisi-sisinya 1 cm, 2 cm, dan 10 cm*

S: *ehm...* (siswa berpikir lama dan mencoba menggambar segitiga tersebut) *Tapi gambarnya kok aneh ya* **(terjadi disequilibrasi)**

P: *kenapa aneh?*

S: *sisinya tidak nyampai. Maksudnya dua sisi ini tidak cukup panjangnya untuk membentuk segitiga. Yang ini 1 cm dan yang ini 2 cm (sambil menunjuk gambar) kalau ditambah hanya 3 cm sisi yang lain 10 cm. Gak cukup*

P: *oh gitu.. terus bagaimana?*

S: *tidak bisa terbentuk segitiga*

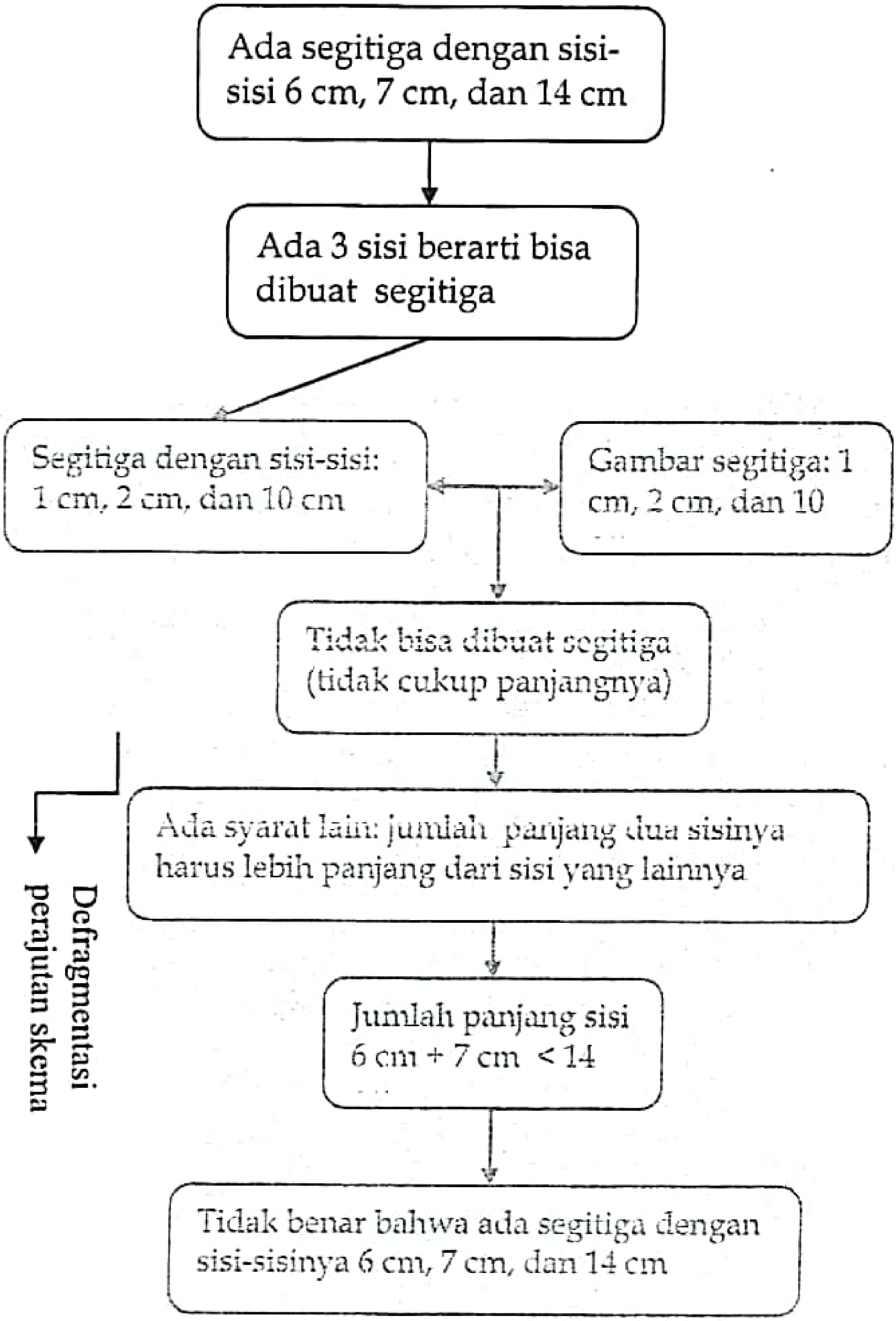
P: *Terus bagaimana dengan segitiga yang ukurannya 6 cm, 7 cm, dan 14 cm*

S: *ini juga tidak cukup. Sisinya 6 cm dan 7 cm kalau disambung hanya 13 cm, sementara sisi yang lain 14 cm. Jadi tidak cukup panjangnya*

P: *Berarti ada syarat lain untuk membentuk segitiga selain memiliki tiga sisi. Apa syaratnya?*

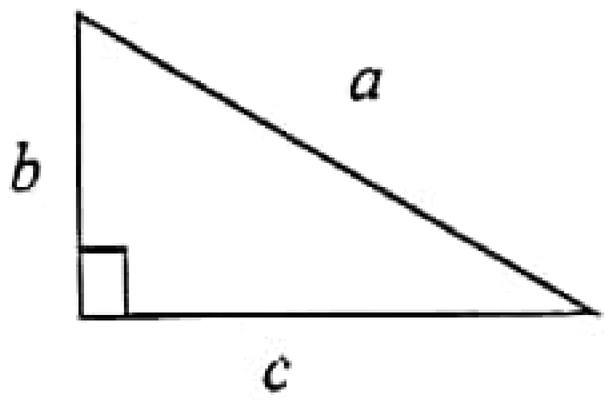
S: *ehm ...* (berpikir agak lama) *syaratnya kalau panjang dua sisinya dijumlahkan tidak boleh kurang dari sisi terpanjangnya*

Berdasarkan dialog tersebut nampak bahwa ada proses defragmentasi struktur berpikir tipe pengaitan antara konsep segitiga dan gambar segitiga. Pada dasarnya siswa telah mengetahui salah satu syarat segitiga dan bisa menggambar segitiga, namun siswa tidak bisa membuat koneksi antara keduanya yang bisa menghasilkan konstruksi konsep syarat panjang sisi-sisi segitiga. Syarat "jumlah panjang kedua sisi harus lebih panjang dari sisi yang lain" baru muncul setelah ada defragmentasi struktur berpikir tipe pemunculan koneksi, yakni setelah ada koneksi antara gambar dan ketiga sisi yang diketahui. Koneksi bersifat produktif dengan menghasilkan sifat yang lain, yakni jumlah panjang dua sisi segitiga harus lebih panjang dari sisi yang lain. Adapun proses defragmentasi struktur berpikir siswa dapat digambarkan sebagai berikut.



Defragmentasi struktur berpikir tipe perajutan skema juga terjadi pada masalah Phytagoras. Siswa diminta untuk menilai pernyataan berikut.

Diberikan segitiga siku-siku



Maka berlaku rumus phytagoras: $a^2 + b^2 = c^2$

Masih banyak siswa yang menilai pernyataan tersebut sebagai pernyataan yang benar. Hal ini terjadi karena ada fragmentasi struktur berpikir siswa yang hanya mengingat rumus tanpa mengaitkan dengan konteks sgitiga yang bersesuaian. Konsep yang terkonstruksi dalam pikiran siswa bahwa rumus Phytagoras adalah $a^2 + b^2 = c^2$ tanpa ada koneksi dengan segitiga siku-siku yang panjang sisi-sisinya bersesuaian.

Defragmentasi struktur berpikir dapat dilakukan dengan memunculkan koneksi (merajut skema) antara rumus Phytagoras dan segitiga siku-siku yang bersesuaian. Siswa sudah memiliki struktur berpikir terkait dengan segitiga siku-siku dan juga sudah memiliki skema terkait dengan rumus Phytagoras. Selanjutnya perlu dibangun koneksi antara segitiga siku-siku dan teori phytaogras melalui dialog berikut.

P: Kamu menilai pernyataan tersebut sebagai pernyataan benar, kenapa?
S: Karena rumus phytagoras ya begitu itu ($a^2 + b^2 = c^2$)
P: kamu yakin dengan jawaban itu

S: ya yakin, karena yang saya dapatkan ya seperti itu

P: Apakah kamu pernah mendapatkan triple phytagoras? Bisa memberikan contoh

S: pernah, contohnya 3, 4, 5

P: bagus. Apakah ada kaitan antara triple phytagoras dan sisi-sisi segitiga

S: Iya itu bisa dikaitkan dengan sisi-sisi segitiga

P:Sekarang coba perhatikan gambar segitiga siku-siku itu (peneliti sambil menunjuk gambar). *Kalau saya menganggap 3, 4, 5 sebagai panjang sisi-sisi segitiga siku-siku tersebut, mana yang paling sesuai?*

S: Biasanya $a = 3$, $b = 4$, *dan* $c = 5$, *sehingga* $3^2 + 4^2 = 5^2$

P: Coba perhatikan lagi segitiga itu, sisi terpanjangnya mana?

S: ehm... (siswa berpikir agak lama). (Sambil bergumam) *Oh ya sisi terpanjangnya a, bukan c. Berarti salah ya, kok c yang bernilai 5 padahal yang terpanjang a kok nilainya 3.*

P: bagaimana, apa yang kamu pikirkan?

S: Saya salah, seharusnya yang terpanjang 5 merupakan a dan b terpendek berarti 3, sedangkan yang satunya lagi c sama dengan 4.

P: rumus yang sesuai dengan segitiga itu apa?

S: mestinya $b^2 + c^2 = a^2$

P: oke. Sekarang kesimpulanmu apa? Apakah rumus phytagoras harus selalu $a^2 + b^2 = c^2$*?*

S: tidak harus $a^2 + b^2 = c^2$. *Perlu disesuaikan dengan gambar segitiga siku-sikunya*

Berdasarkan dialog tersebut, nampak bahwa siswa mengalami perubahan struktur beripikir setelah mengaitkan antara rumus phytagoras, triple phytgoras, dan gambar *segitiga yang bersesuaian. Siswa mengalami* ***disequilibrasi*** setelah melakukan pengecekan kesesuaian antara rumus

S: benar, karena penguraiannya kan ya sama dengan $(x+y)^2 = x^2 + y^2$

P: Anda yakin dengan jawaban itu, alasannya apa?

S: sesuai dengan di soal itu (maksudnya soal pelacak), saya beralasan $(xy)^2 = x^2y^2$

P: Bisakah memberi contoh, kasus untuk nilai x dan y tertentu?

S: Misalkan $x = 2$ dan $y = 3$, maka $(xy)^2 = (2x3)^2 = 6^2 = 36$

P: Benar ya. Kalau untuk penjumlahan di atas apa berlaku?

S: Misalkan $x = 2$ dan $y = 3$, maka $(x+y)^2 = (2+3)^2 = 5^2 = 25$

P: Terus bagaimana dengan $x^2 + y^2$?

S: $x^2 + y^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$. Oh ya berbeda ya. Berarti salah jawaban saya. Kok salah ya. Dimana salahnya (siswa bingung – mengalami konflik kognitif)

P: Apa maksud dari $(x+y)^2$?

S: Apa ya

P: Kalau 5^2, artinya apa?

S: $5^2 = 5 \times 5$. Oh ya, berarti $(x+y)^2 = (x+y)(x+y)$. Ehm.. tapi bagaimana ya (siswa bingung)

P: kalau 5(2+3), bagaimana kamu menyelesaikan?

S: 5 (2+3) = 5x2 + 5x3. Oh ya saya ingat $(x+y)(x+y) = x(x+y) + y(x+y) = x^2 + xy + yx + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$

Pada awalnya siswa berpikir bahwa $(x+y)^2 = x^2 + y^2$ analog dengan bentuk $(xy)^2 = x^2y^2$. Pada saat siswa diminta mencari contoh kasus untuk nilai x dan nilai y tertentu. Siswa mengambil contoh x = 2 dan y = 3. Siswa mencobakannya pada kasus $(xy)^2 = x^2y^2$, $(2x3)^2 = 6^2 = 36$. Hal ini sama nilainya dengan $2^2 3^2 = 4 \times 6 = 36$, hasilnya sama. Sampai pada proses ini, siswa belum bisa memperbaiki kesalahannya. Peneliti menggiring kasus yang diambil siswa x = 2 dan y = 3 untuk diterapkan pada kasus penjumlahan. Siswa mencoba membandingkan hasil dari $(x+y)^2$ dan

x^2+y^2. Ternyata hasilnya berbeda, $(x+y)^2$ = $(2+3)^2$ = 5^2 = 25 sedangkan x^2+y^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13. Dalam hal ini siswa mengalami *conflict cognitive*. Defragmentasi dilakukan dengan mempertanyakan makna dari $(x+y)^2$, namun siswa belum bisa sambung (masih kebingungan). Defragmentasi dilanjutkan dengan memberikan contoh 5^2, siswa diminta memaknainya. Dengan *conflict cognitive* dan pemaknaan 5^2, siswa hanya bisa melanjutkan sampai 5^2 = 5x5. Defragmentasi mulai efektif, ketika kepada siswa diberikan masalah 5x(2+3). Siswa bisa memahami 5x(2+3) = 5x2+5x3 dan akhirnya siswa bisa melanjutkan $(x+y)^2$ = $(x+y)(x+y)$ = $x(x+y) + y(x+y) = x^2 + xy + yx + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

Defragmentasi struktur berpikir analogis melalui *conflict cognitive* juga terjadi pada kasus penjumlahan bilangan akar. Siswa membenarkan pernyataan bahwa $\sqrt{3}+\sqrt{3}=\sqrt{6}$ dan $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$. Siswa menganalogikan kasus $\sqrt{3}+\sqrt{3}=\sqrt{6}$ dengan 3 + 3 = 6 dan menganalogikan pernyataan $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ dengan $\sqrt{3}+\sqrt{3}=\sqrt{6}$, akibatnya siswa menjawab benar pernyataan tersebut. Untuk memperbaiki kesalahan siswa tersebut dilakukan defragmentasi dengan memberikan kasus yang bertentangan (*conflict cognitive*). Adapun proses defragmentasi struktur berpikir dilakukan sebagai berikut.

P: Anda yakin bahwa pernyataan $\sqrt{3}+\sqrt{3}=\sqrt{6}$ benar?

S: Benar karena $\sqrt{3}+\sqrt{3}$ *ya hasilnya* $\sqrt{6}$

P: Kok bisa benar, alasannya apa?

S: bentuk itu kan sama saja dengan 3 + 3 = 6

P: oh gitu. Kalau bentuk $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$, *Anda juga menjawab benar, bisa dijelaskan alasannya?*

S: saya kira itu juga sama dengan bentuk $\sqrt{3}+\sqrt{3}=\sqrt{6}$*, kan sama artinya* $\sqrt{3}+\sqrt{3}=\sqrt{3+3}$

P: Gitu ya. Coba kalau bentuk $\sqrt{4}+\sqrt{4}$*, hasilnya berapa?*

S: Hasilnya ya $\sqrt{8}$ *bu*

P: Coba $\sqrt{4}$ *itu berapa?*

S: 2. Oh ya saya salah bu. Oiya ya 4. Berarti salah, jadi $\sqrt{4}+\sqrt{4}=4$

P: Jadi $\sqrt{3}+\sqrt{3}$ *berapa?*

S: Kalau $\sqrt{4}+\sqrt{4}=4$*. Hm.. boleh dituliskan sebagai* $4=2\sqrt{4}$*.* (diam agak lama)*. Berarti* $\sqrt{3}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$*.*

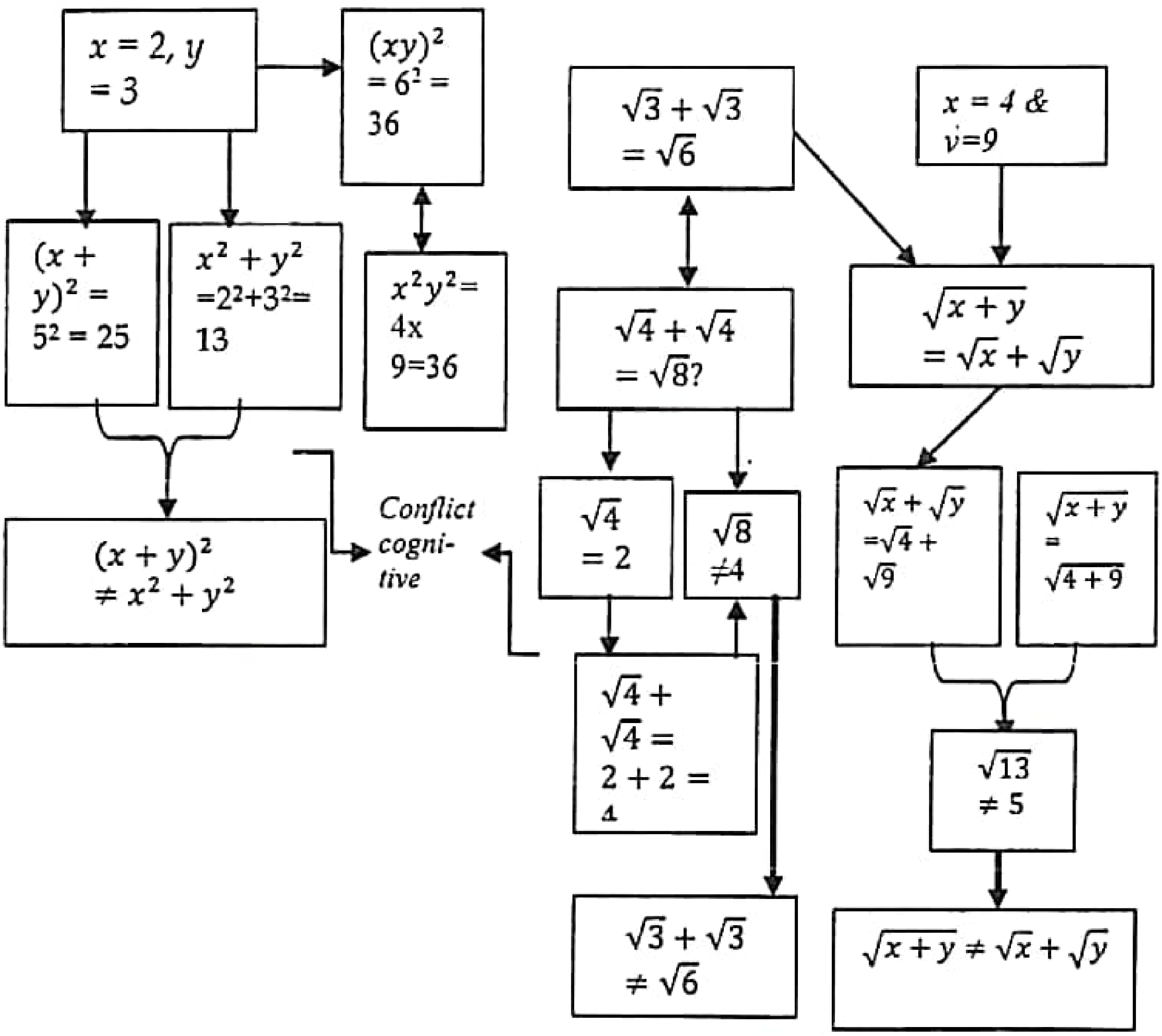
P: Kalau begitu apakah bentuk $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ *menurut kamu benar?*

S: saya kira salah.

P: bisakah memberikan contoh, mungkin bisa kamu ambil bilangan yang akarnya mudah?

S: ehm...kalau saya ambil $x=4$ *dan* $y=9$*, maka* $\sqrt{4}+\sqrt{9}=2+3=5$*. Lima itu akar dari 25, sementara* $\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$*. Berarti berbeda. Sekarang saya yakin pernyataan itu salah.*

Defragmentasi struktur berpikir siswa tipe *conflict cognitive* dilakukan dengan memberikan masalah kepada siswa $\sqrt{4}+\sqrt{4}$. Awalnya siswa masih menjawab $\sqrt{8}$. Defragmentasi dilanjutkan dengan mempertanyakan $\sqrt{4}$. *Conflict cognitive* muncul ketika siswa membandingkan $\sqrt{4}+\sqrt{4}=2+2=4$ dengan $\sqrt{8}$, ternyata berbeda. Kesadaran tersebut berlanjut untuk menyelesaikan masalah $\sqrt{3}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$. Namun demikian ketika dipertanyakan lagi tentang pernyataan $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$, siswa masih ragu-ragu. *Conflict cognitive* dibangun lagi oleh peneliti dengan meminta kepada siswa untuk mencari contoh bilangan yang mudah dicari akarnya. Siswa menemukan bahwa $\sqrt{4} + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5 \neq \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$. Hal ini menunjukkan bahwa defragmentasi *conflict cognitive* dapat digunakan untuk memperbaiki kesalahan analogi. Proses defragmentasi *conflict cognitive* dapat digambarkan seperti berikut.



D. Defragmentasi Struktur Berpikir Logis

Defragmentasi struktur berpikir untuk memperbaiki berpikir logis dilakukan ketika siswa mengonstruksi konsep fungsi. Siswa membenarkan pernyataan "misalkan f suatu fungsi. Jika $f(a) = f(b)$ maka $a = b$". Alasan yang diberikan oleh siswa, karena a dan b dipetakan oleh f hasilnya sama, maka a dan b adalah sama. Siswa belum bisa menangkap logika jika p maka q, hanya salah kalau kasusnya p benar dan q salah. Artinya untuk menyangkal pernyataan tersebut cukup mencarikan contoh penyangkalnya.

6	Misalkan f suatu fungsi. Jika f(a) = f(b) maka a = b	√		karena bila a dan b dipetakan hasilnya sama, maka a dan b sama

Defragmentasi struktur berpikir logis dilakukan dengan *conflict cognitive* dan *scaffolding*. *Scaffolding* dilakukan dengan mengarahkan siswa untuk mencari contoh terkait dengan fungsi, harapannya dapat mencari pernyataan yang dapat menangkal penalaran logis. Dalam mengonstruksi beberapa contoh ternyata siswa hanya menemukan contoh penguat dari kesimpulannya. Siswa belum menemukan contoh yang bertentangan, sehingga defragmentasi dilanjutkan dengan menimbulkan *conflict cognitive*. *Conflict cognitive* dilakukan dengan mengarahkan untuk mengambil contoh fungsi $f(x) = x^2$. Adapun proses defragmentasi struktur berikir logis dilakukan dengan wawancara peneliti dengan subjek seperti berikut.

S: benar, karena itu kan $f(a) = f(b)$. *Jadinya kan pasti* $a = b$

P: bisakah memberikan contoh fungsinya?

S: $f(x) = 3x + 6$, $f(a) = 3a+6$ *dan* $f(b) = 3b+6$. $3a + 6 = 3b + 6$ *diperoleh* $a = b$.

P: adakah contoh lain

S: sama saja

P: Coba begini misalkan $f(x) = x^2$,

S: $f(a) = a^2$ *dan* $f(b) = b^2$, *sama saja* $a^2 = b^2$ *maka* $a = b$

P: Coba adakah bilangan bulat yang bertanda berbeda tetapi kuadratnya sama?

S: apa boleh 3 dan -3

P: coba kalau $f(3)$ dan $f(-3)$ berapa nilainya

S: $f(3) = 9$ dan $f(-3) = 9$

P: Coba kaitkan dengan masalah tersebut, apa yang dapat disimpulkan?

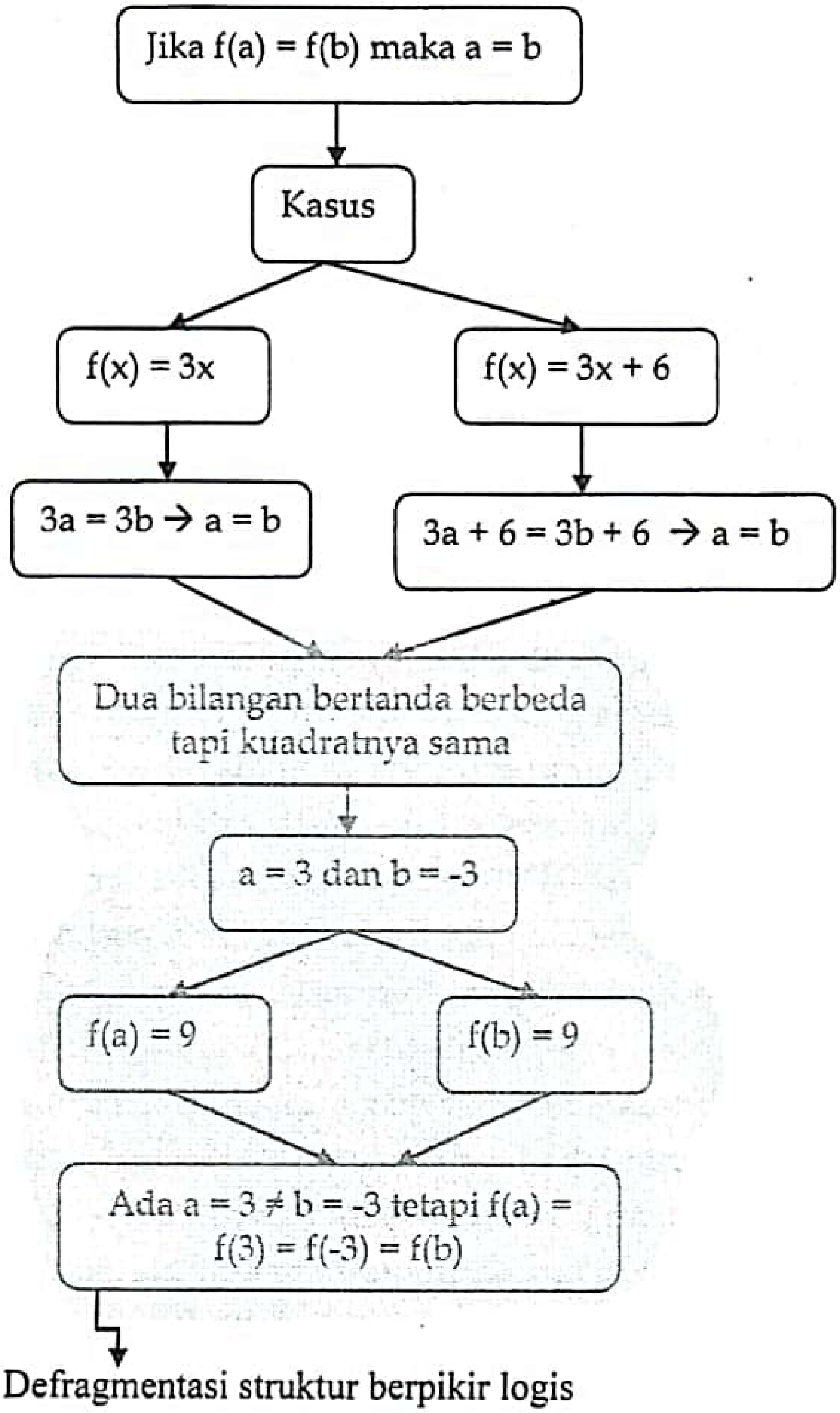
S: Oiya jadi kesimpulannya jika $f(a) = f(b)$ belum tentu $a = b$

Awalnya siswa menganggap benar pernyataan jika $f(a) = f(b)$, maka $a = b$. Defragmentasi struktur berpikir logis dilakukan dengan meminta siswa membuat contoh, namun contoh yang dibuat belum mengarah pada jawaban benar, justru memperkuat pernyataan awal siswa. Karena belum mengarah ke jawaban yang seharusnya, defragmentasi dilanjutkan dengan memberikan kasus $f(x) = x^2$. Struktur berpikir siswa berubah dengan mencoba kasus a = 3 dan b = -3, siswa menjadi menyadari adanya kesalahan dalam menilai pernyataan tersebut.

Penalaran siswa dalam berpikir logis banyak dipengaruhi oleh proses induktif. Siswa mengonstruksi kesimpulan dari pernyataan "misalkan f suatu fungsi. Jika $f(a) = f(b)$ maka $a = b$" didasarkan pada proses induktif dengan mengambil contoh fungsi dan mencoba memasukkan nilai-nilai untuk mengecek benar-tidaknya kesimpulan yang dibuat. Ketika siswa mencoba mengambil fungsi $f(x) = 3x$ dan mencoba mengambil beberapa nilai x bilangan bulat. Karena $f(a) = f(b)$ maka $3a = 3b$, sehingga diperoleh a = b. Begitupula ketika dipilih $f(x) = 3x + 6$, maka $3a + 6 = 3b + 6$ dan juga diperoleh $a = b$. Proses tersebut diteruskan untuk fungsi-fungsi linear lain dan hasilnya selalu sama, yakni $a = b$.

Nampaknya struktur berpikir siswa hanya didominasi oleh fungsi linear, sehingga tidak dapat menemukan kalimat penyangkalnya. Intervensi yang dilakukan belum membawa perubahan, dengan kata lain defragmentasi struktur berpikir belum berhasil. Karena itu dilakukan *scaffolding* dengan memberikan pancingan pertanyaan, bagaimana kalau fungsinya $f(x) = x^2$. Dengan *scaffolding* tersebut, siswa mencoba memasukkan nilai x dengan bilangan bulat positif dan hasilnya tetap $a = b$. *Scaffolding* dilanjutkan dengan memancing pertanyaan "adakah bilangan bulat yang berlainan tanda yang jika dikuadratkan menghasilkan bilangan sama?". Siswa mengambil dua bilangan 3 dan -3. Setelah mencoba $f(3) = 9$ dan $f(-3) = 9$, siswa mengalami *conflict cognitive* "ternyata ada bilangan yang berbeda tetapi kuadratnya sama, mestinya ini bisa dikaitkan dengan pernyataan tersebut". Dengan berpikir cukup lama akhirnya siswa menyimpulkan bahwa penilaian terhadap pernyataan "misalkan f suatu fungsi. Jika $f(a) = f(b)$ maka $a = b$" adalah salah, karena ada $a = 3$ dan $b = -3$ yang berbeda tetapi $f(3) = f(-3)$. Hal ini menunjukkan secara implisit bahwa siswa sudah mampu mengonstruksi konsep berpikir logis, yakni pernyataan p → q dapat diingkari dengan $p \wedge -q$. Proses penyangkalan pernyataan p → q dilakukan dengan mengambil kasus $a \neq b$ tetapi $f(a) = f(b)$. Dalam hal ini $a = 3 \neq -3 = b$ tetapi $f(3) = 9 = f(-3)$.

Proses defragmentasi struktur berpikir logis siswa berlangsung cukup panjang, karena terkait juga dengan konstruksi konsep fungsi. Ketika konsep fungsinya masih belum terkonstruksi secara utuh, maka siswa akan kesulitan mencari contoh fungsi yang tidak linear. Akibatnya proses defragmentasi struktur berpikir logis siswa membutuhkan waktu cukup panjang, namun demikian akhirnya siswa mampu merubah struktur berpikirnya. Adapun proses defragmentasi struktur berpikir logis dapat digambarkan sebagai berikut.



BAB V
DEFRAGMENTASI STRUKTUR BERPIKIR SISWA DALAM PEMECAHAN MASALAH MATEMATIKA

Defragmentasi struktur berpikir siswa dalam pemecahan masalah memiliki banyak bentuk tergantung dari kompleksitas masalah yang dihadapi. Semua jenis defragmentasi struktur berpikir perlu dilakukan jika masalah yang dihadapi sangat komplek, seperti pemunculan skema, perajutan skema, pemunculan koneksi, perbaikan struktur berpikir analogis, perbaikan struktur berpikir anaogis, dan pemunculan skema makna. Sebagian bentuk defragmentasi (pemunculan skema, perajutan skema, perbaikan struktur berpikir analogis, perbaikan struktur berpikir anaogis) sudah dibahas di Bab IV dan sudah disertai contoh-contoh proses defragmentasinya. Karena itu di Bab V ini lebih menekankan pada jenis defragmentasi pemunculan koneksi dan pemunculan skema makna.

Masalah yang diberikan kepada siswa sangat menantang, karena itu memerlukan langkah-langkah pemecahan yang kompleks. Dalam hal ini ada tiga masalah yang memiliki cakupan materi berbeda. Masalah pertama terkait dengan garis singgung persekutuan dua lingkaran dikaitkan dengan luas daerah persegi. Masalah kedua terkait dengan faktor persekutuan terbesar yang dikemas dalam masalah kontekstual "kaki laba-laba dan kaki kumbang". Maslah ketiga terkait dengan geometri, yakni bangun persegi dan lingkaran yang dipadukan sehingga membentuk bangun irisan dua lingkaran yang harus ditentukan luasnya. Masalah ketiga membutuhkan koneksi antara bangun persegi dan lingkaran, dimana untuk menyelesaikannya memerlukan berpikir cukup tinggi, terutama dalam cara memandang bangun dari berbagai sisi.

A. *Pemunculan Koneksi (Connection Appearances)*

Defragmentasi pemunculan koneksi terjadi pada kasus siswa memecahkan masalah yang terkait dengan koneksi garis singgung persekutuan dua lingkaran dan luas daerah persegi.

Masalah pertama

Dua lingkaran masing-masing berjari-jari 7 cm dan 2 cm. Panjang garis singgung persekutuan luarnya adalah 12 cm. Jika A dan B masing-masing merupakan titik-titik sudut di suatu persegi sehingga A pada lingkaran pertama dan B berada pada lingkaran kedua, maka tentukan luas daerah terkecil dari persegi tersebut!

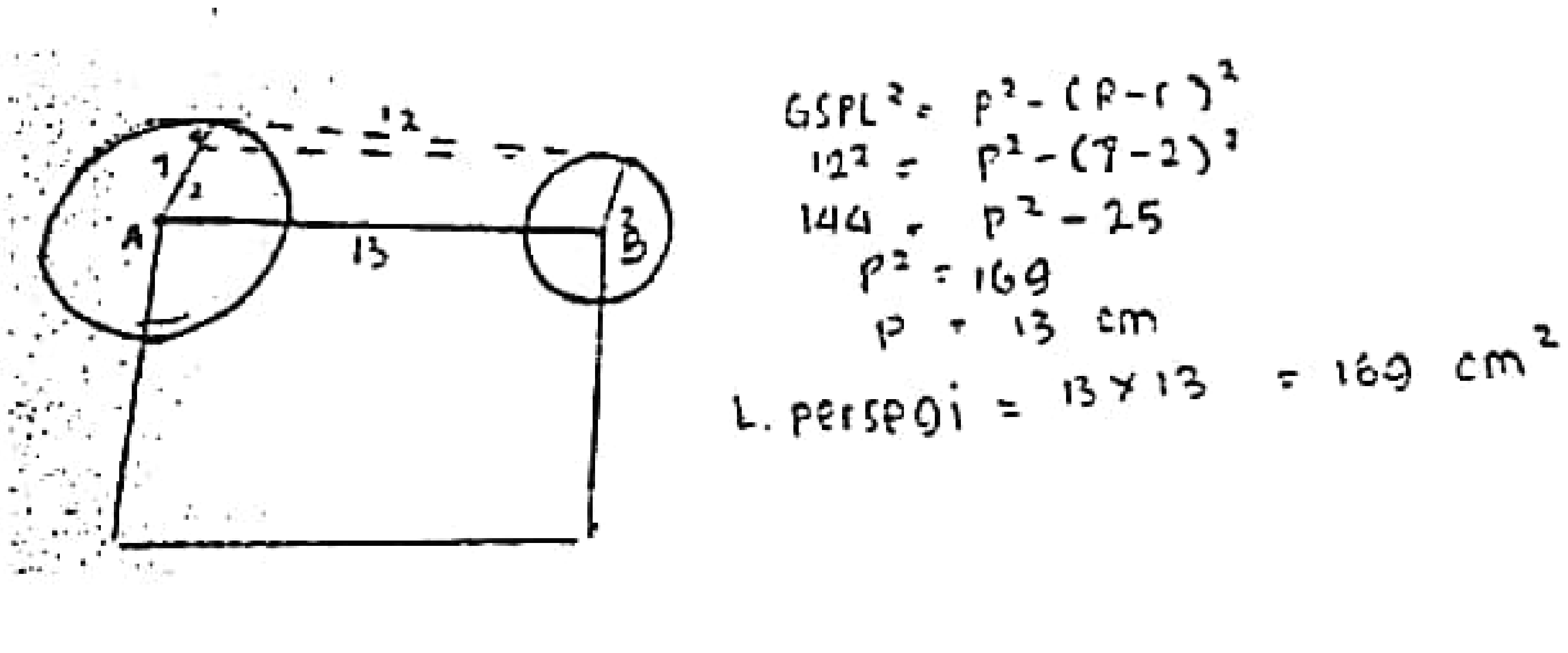
Dalam menyelesaikan masalah pertama siswa sudah memiliki skema terkait dengan garis singgung persekutuan dua lingkaran. Siswa sudah memiliki skema terkait dengan menyelesaikan jarak kedua lingkaran. Hal ini dapat dilakukan dengan mudah karena sampai pada langkah ini masih bisa diselesaikan dengan prosedural. Siswa sudah tahu rumus jarak dua lingkaran (d) dikaitkan dengan jari-jari lingkaran besar dan jari-jari lingkaran kecil (R & r) serta panjang garis singgung persekutuan luarnya (s). Bahwa rumus jarak dua lingkaran (d) yang digunakan adalah

$$d^2 = s^2 + (R-r)^2 = 12^2 + (7-2)^2 = 144 + 25 = 169$$

$$d = \sqrt{169}$$

Meskipun jarak kedua pusat lingkaran sudah ditemukan, namun siswa tidak bisa melanjutkan lagi untuk menentukan sisi persegi yang diinginkan. Fragmentasi struktur berpikir siswa tersebut adalah tidak bisa membuat koneksi (*nothing connection*) satu masalah dengan masalah lain. Proses berpikir yang dominan pada siswa adalah berpikir prosedural. Siswa mampu menyelesaikan masalah yang membutuhkan berpikir prosedural tetapi gagal ketika masalah yang disajikan non rutin. Ketika sudah memperoleh jawaban panjang garis singgung, siswa tidak bisa mengaitkan dengan titik A dan titik B yang ada pada lingkaran.

Kesalahan mulai terjadi ketika siswa menginterpretasikan pernyataan titik A dan titik B ada pada lingkaran. Mereka mengonstruksi titik A dan titik B pada lingkaran dengan menempatkannya di pusat lingkaran besar dan pusat lingkaran kecil. Dampaknya, persegi yang dibuat oleh siswa memiliki sisi dengan panjang jarak kedua lingkaran. Ketika sudah diperoleh jarak dua pusat lingkaran langsung ditemukan luas perseginya sebagai kuadrat dari jarak kedua lingkaran, yaitu 13 x 13 = 169 cm². Jawaban siswa disajikan sebagai berikut.



Defragmentasi dimulai dari *conflict cognitive*, pemunculan skema dan dilanjutkan dengan pemunculan koneksi.

Konflik kognitif dimunculkan dengan memberikan pertanyaan kepada siswa seperti berikut.

S: Masalah ini adalah mencari luas persegi terkecil
P: Apakah ini sudah mendapatkan luas persegi terkecil? Coba jelaskan jawabanmu?
S: Belum. Yang sudah diketahui panjang garis singgung dua lingkaran dan jari-jari kedua lingkaran. Bermodalkan pada informasi ini, saya bisa menghitung jarak kedua lingkaran dengan menggunakan rumus garis singgung persekutuan luar. Dengan rumus pythagoras. Iya maaf ini salah tulis harusnya 5^2*, kan ini jari-jarinya sejajar kalau jari-jari lingkaran kedua ditarik garis lurus jadi sisanya pada jari-jari lingkaran pertama* $7 - 2 = 5$.

Defragmentasi struktur berpikir tentang kesalahan menempatkan titik A dan B dilakukan dengan *conflict cognitive,* pemunculan skema, dan pemunculan koneksi melalui proses menggali makna lingkaran dan daerah lingkaran. Conflict cognitive muncul ketika peneliti mengambil satu kasus titik di daerah lingkaran dan mempertanyakan kepada siswa apakah titik itu ada pada lingkaran, pada diri siswa terjadi pertentangan antara definisi lingkaran dan titik-titik yang posisinya di daerah lingkaran. Defragmentasi pemunculan skema terjadi ketika peneliti mempertanyakan perbedaan antara lingkaran dan daerah lingkaran, siswa langsung memperbaiki struktur berpikirnya. Setelah disadari adanya kesalahan memahami lingkaran dan kesalahan menempatkan titik A dan titik B, dalam struktur berpikir siswa ada proses defragmentasi pemunculan koneksi, yakni hubungan antara titik A, titik B, jarak kedua lingkaran, dan gambar persegi dirajut menjadi bahan memecahkan masalah.

P: Titik A dan B merupakan titik-titik sudut pada persegi dengan A pada lingkaran pertama dan B pada lingkaran kedua. Coba pada lingkaran pertama ini, tunjukkan lingkaran itu yang mana?

S: Subjek menunjuk titik A dan B pada pusat lingkaran pertama dan lingkaran kedua

P: Titik A dan B yang kamu buat ada pada lingkaran atau tidak?

S: Ya. Ada di lingkaran

P:menurut kamu, lingkaran itu apa?

S: ehm.. titik-titik (maksudnya kumpulan titik-titik) yang berjarak sama dari titik tertentu.

P: mana yang disebut titik tertentu?

S: ini Pak, pusat lingkaran

P: terus mana titik-titik yang berjarak sama dari pusat lingkaran?

S:ini pak (siswa menunjuk keliling lingkaran)

P: apakah termasuk dalamnya juga?

S: ehm... (siswa diam lama). Iya Pak

P: kalau titiknya di sini (peneliti menunjuk titik di dalam lingkaran), apakah jaraknya sama dari pusat? **(defragmentasi conflict cognitive)**

S: tidak pak. Oh ya bagaimana ya ini

*P: masih ingatkah, apa bedanya lingkaran dan daerah lingkaran?***(defragmentasi memunculkan skema)**

S: Oh ya. Lingkaran itu yang melingkar saja. Di dalamnya daerah lingkaran

P: kalau begitu apakah titik A dan titik B yang kamu tuliskan sudah benar?

*S: salah Pak. (dilanjutkan dengan memperbaiki posisi titik A dan titk B). Ini yang betul?***(defragmentasi pemunculan koneksi)**

P: kalau begitu perseginya yang mana?

*S: ini Pak (siswa menggambar persegi dengan panjang sisinya 4 cm) ?***(defragmentasi pemunculan koneksi)**

P: kalau begitu luas daerah perseginya berapa?

S: ya 16 cm^2 Pak

P: Apakah kamu sudah yakin dengan jawaban itu

S: ya Pak saya yakin

Dengan perubahan struktur berpikir tentang makna lingkaran dan posisi titik A dan titik B, maka siswa mulai bisa menggambar persegi baru. Dia merefleksikan kembali bahwa panjang jari-jari lingkaran besar 7 cm, panjang jari-jari kecil 2 cm, dan jarak kedua lingkaran 13 cm , maka bisa diperoleh jarak terpendek dari A ke B adalah 13 cm – 7 cm – 2 cm = 4 cm. Setelah memperoleh pemahaman bahwa jarak titik A dan titik B adalah 4 cm, siswa melanjutkan menggambar persegi dengan panjang sisinya 4 cm. Siswa memutuskan bahwa luas daerah persegi yang diinginkan adalah 4 x 4 = 16 cm^2. Jawaban siswa tersebut masih salah, sehingga defragmentasi dilanjutkan dengan mempertanya-kan kepada siswa, masih adakah persegi dalam bentuk lain yang memenuhi syarat A dan B sebagai titik sudut di persegi. Siswa masih mengalami kebuntuan dan akhirnya diberikan stimulus dengan memunculkan skema untuk bahan merajut koneksi dengan indept interview seperti berikut.

P: sekarang, kalau dipilih yang ini A dan B, apakah jarak A dan B ini sudah yang paling kecil antara lingkaran pertama dan lingkaran kedua

S: belum, ada lagi yang ini. (siswa menunjuk jarak terpendek antar lingkaran pertama dan kedua yang terletak pada garis 13 cm)

P: selanjutnya titik-titik sudut persegi itu yang mana? Coba gambarkan persegi terlebih dulu

S: ujung-ujung dari persegi ini. (Sambil menunjuk gambar)

P: kalau pada gambar ini bagaimana gambar perseginya? Berapa luasnya?

S: Siswa menggambar persegi pada lingkaran dan menghitung luasnya 4 x 4 = 16 cm^2

P: Apakah hanya persegi ini yang bisa dibuat?

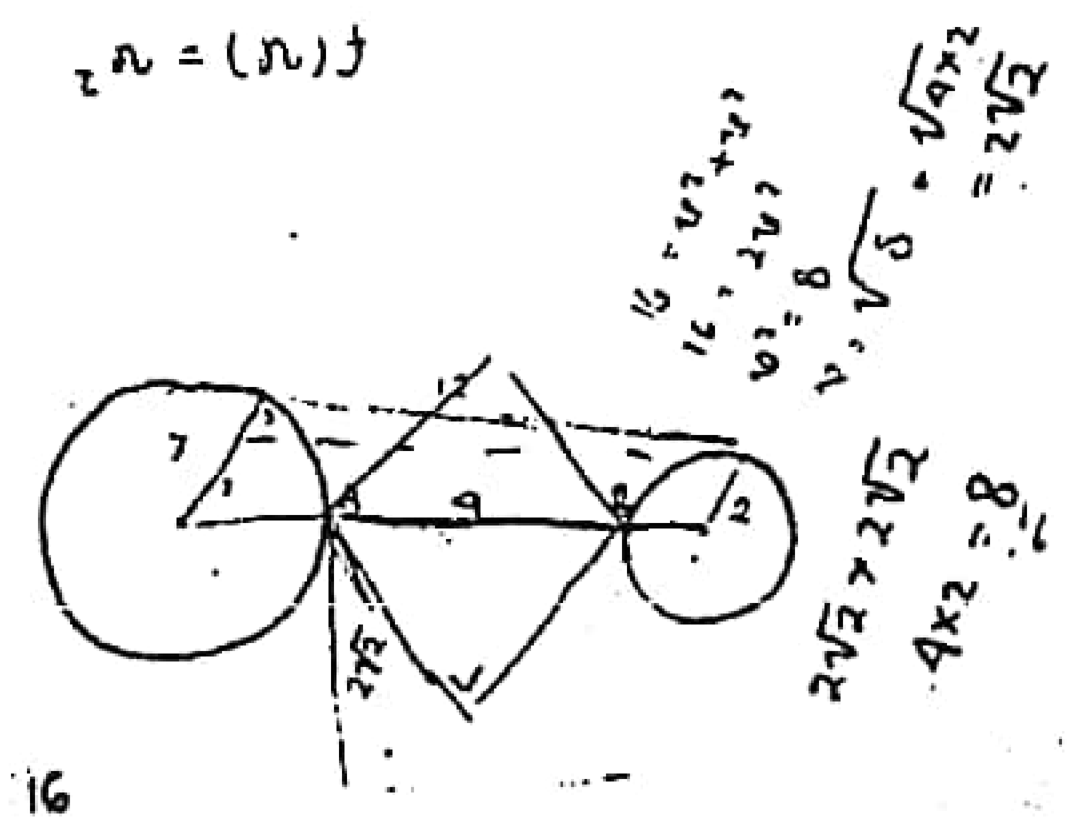
S: Bagaimana ya (siswa berpikir serius dalam waktu lama). Kayaknya memang seperti ini bentuknya

P: *Mungkinkah posisi A dan B tidak menjadi sisi persegi tetapi masih titik sudut persegi?*

S: *maksudnya bagaimana pak?*

P: *Komponen apa saja yang terkait dengan persegi?sebutkan sebanyak-banyaknya*

S: *sisi (berpikir lama), keliling, luas, dan diagonal* (**defragmentasi pemunculan koneksi)**



P: *bisakah kamu gambar persegi sebarang dan coba tempatkan titik A dan titik B yang mungkin*

S: *ini ya pak (siswa menunjukkan beberapa gambar persegi dengan titik A dan titik B posisinya berbeda)* **(defragmentasi pemunculan koneksi)**

P: *Kalau kembali pada gambar di lingkaran tadi, masih adakah bentuk persegi yang lain?*

S: *ehm... oh ya Pak masih ada (siswa menggambar persegi dengan AB sebagai diagonal)*

P: *oh begitu... terus luasnya berapa?*

S: *ehm (siswa berpikir lama). Diagonalnya 4 cm, bagaimana ya. Menggunakan phytagoras* $s^2 + s^2 = 4^2$. *Diperoleh* $2s^2 = 16$ *dan* $s^2=8$, *berarti* $s = \sqrt{8}$. **(defragmentasi pemunculan koneksi)**

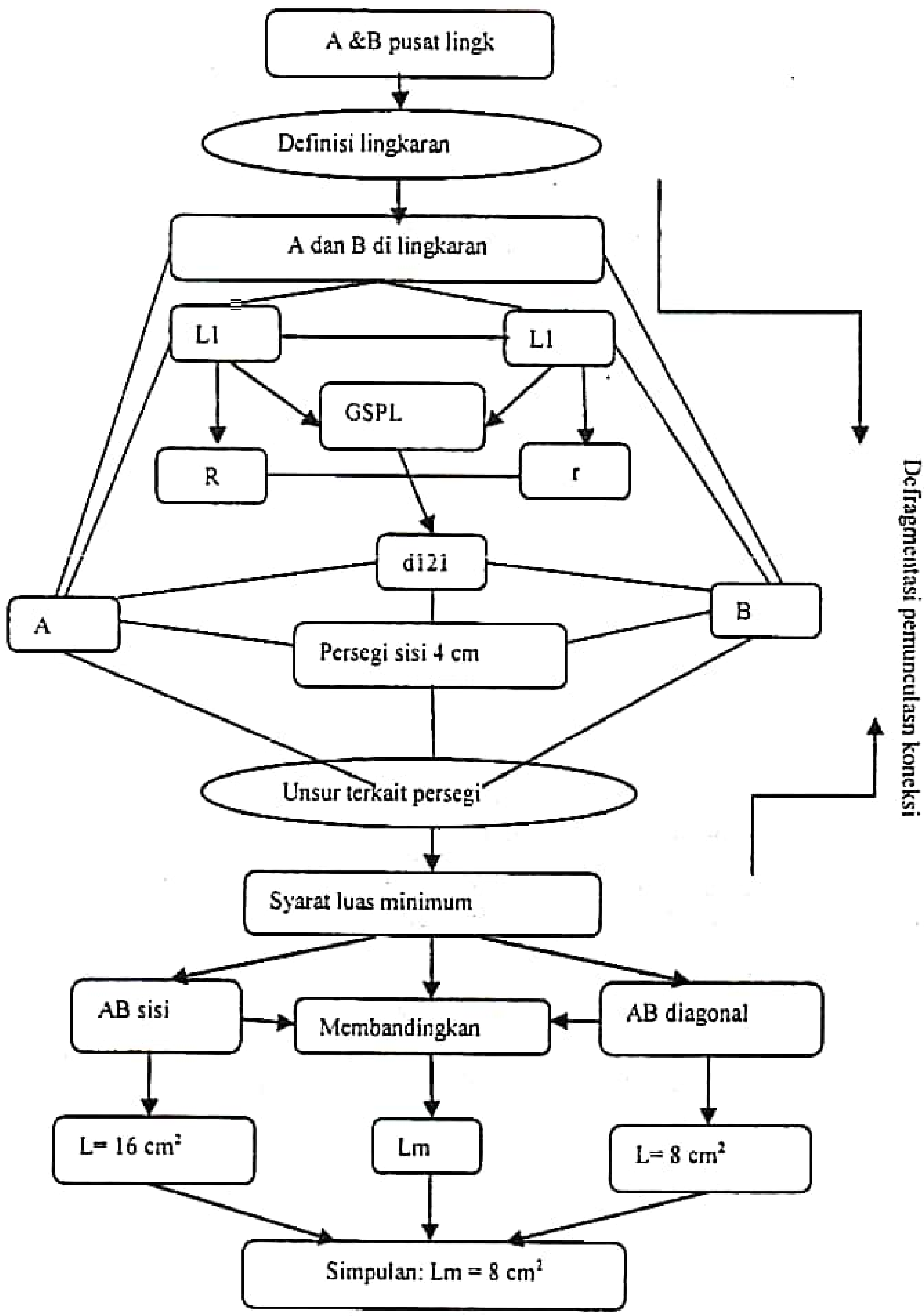
P: *berapa luasnya?*

S: *Diperoleh luas sama dengan sisi dikali sisi, diperoleh* $\sqrt{8} \times \sqrt{8} = 8\ m^2$.

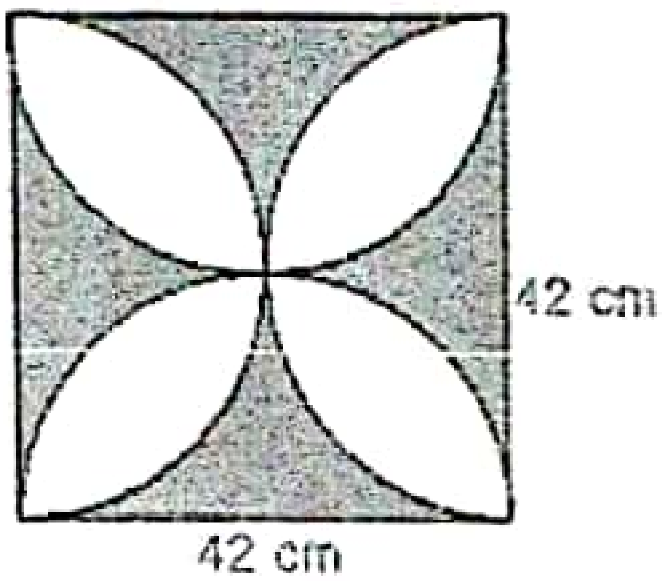
P: *Mana yang lebih minimum 8 atau 16?*

S: $8\ m^2$

Defragmentasi pemunculan koneksi mulai terjadi pada saat peneliti mempertanyakan kepada siswa komponen-komponen yang terkait dengan bangun persegi dan kemungkinan penempatan titik A dan titik B pada persegi. Struktur berpikir siswa mulai 'terpantik" untuk merajut koneksi menuju penyelesaian. Proses degragmenting pemunculan koneksi disajikan seperti berikut.



Defragmentasi struktur berpikir tipe pemunculan koneksi juga dilakukan dalam proses penyelesaian masalah ketiga. Masalah ketiga yang diberikan adalah sebagai berikut.



Tentukan luas daerah yang berwarna hitam pada gambar di samping (jika $\pi = \frac{22}{7}$)!

Dalam menyelesaikan masalah tersebut siswa berfokus pada bentuk persegi dan lingkaran, namun tidak bisa menghubungkan kedua bangun tersebut yang dapat menghasilkan daerah yang diarsir. Siswa masih berfokus pada proses memecah bangun tersebut dengan menarik diagonal persegi, namun tidak mendapatkan langkah penyelesaian.

Defragmentasi pemunculan koneksi dilakukan dengan scaffolding seperti berikut.

P: Bagaimana kamu memikirkan masalah ini?
S: ada bangun persegi dan lingkaran
P: bagaimana hubungan kedua bangun tersebut?
S: daerah yang diarsir atau berwarna hitam tersebut merupakan daerahnya persegi dan diluar gambar daun yang merupakan irisan dua lingkaran.
P: terus apa yang kamu rencanakan untuk menyelesaikan?
S: kayaknya perlu ditarik garis begini (diagonal persegi). Tapi bentuknya menjadi seperti ini.... (siswa berpikir lama)*... terus bagaimana ya.... saya masih bingung*
P: Coba kamu perhatikan setengah lingkaran atas dan setengah lingkaran bawah!

S: terus apa maksudnya. Di masing-masing setengah lingkaran kan ada daun dan daerah warna hitam

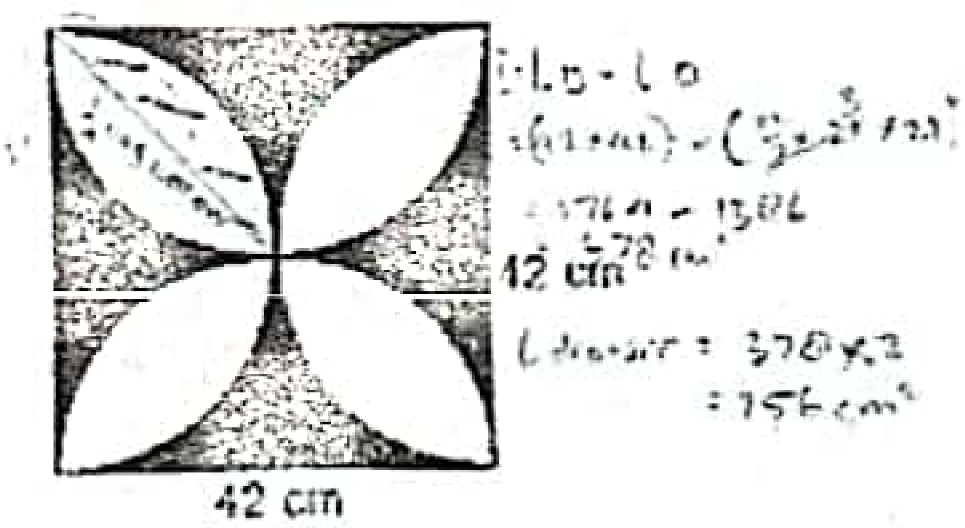
P: Kalau saya tutup setengah lingkaran atas dan setengah lingkaran bawah, apa yang terjadi? (**Scaffolding - pemunculan koneksi**)

S: (siswa memperhatikan dan membayangkan dua setangah lingkaran ditutup).. *oh ya... saya tahu, kalau saya ambil setengah lingkaran atas dan setengah lingkaran bawah akan ketemu daerah terarsir hitam kiri dan kanan.*

P: terus....

S: berarti daerah hitam kanan dan kiri sudah ketemu. Daerah hitam atas dan bawah juga bisa diperoleh dengan cara sama

Dari dialog tersebut nampak bahwa ada proses defragmentasi struktur berpikir siswa berupa pemunculan koneksi antara bangun persegi dan lingkaran dengan intervensi *scaffolding.*



Pada akhirnya struktur berpikir siswa dalam menyelesaikan masalah tersebut dapat terbentuk secara benar. Luas daearh persegi dikurangi luas lingkaran menghasilkan luas daerah berwarna hitam (sebelah kiri dan sebelah kanan). Dengan cara sama luas daerah berwarna hitam atas dan bawah, sehingga luas yang diarsir (hitam) sama dengan dua kali luas daerah persegi dikurangi luas daerah lingkaran. Siswa menghitung luas daerah persegi dikurangi luas daerah lingkaran diperoleh 378 cm^2 dan luas daerah berwarna hitam merupakan dua kali dari 378 cm^2, sehingga diperoleh luas daerah berwarna hitam sama dengan $2 \times 378 = 576$ cm^2.

B. Pemunculan Skema Makna

Defragmentasi struktur berpikir terkait dengan "pemunculan skema makna" dilakukan untuk memperbaiki fragmentasi pemecahan masalah faktor persekutuan. Masalah yang diberikan bersifat open ended, memiliki jawaban lebih dari satu. Penyelesaian masalah dapat dilakukan dengan strategi pemodelan dan coba-coba. Adapun masalah yang diberikan adalah sebagai berikut.

Seorang anak mengumpulkan laba-laba dan kumbang di dalam sebuah kotak, kemudian dia menghitung jumlah kaki-kakinya. Ternyata banyak kaki laba-laba dan kumbang adalah 54. Jika laba-laba kakinya 8 dan kumbang kakinya 6, maka tentukan kemungkinan banyaknya laba-laba dan kumbang yang dikumpulkan!

Dalam menyelesaikan masalah tersebut, sebagian siswa memodelkan dengan memisalkan banyak laba-laba dengan l dan banyak kumbang dengan k.

banyak laba² = l
— " — kumbang = k

Dengan diketahui banyaknya kaki laba-laba dan kumbang sebanyak 54, siswa memodelkan seperti brikut.

$$8 \times l + 6 \times k = 54$$
$$8l + 6k = 54$$
$$4l + 3k = 27$$

Siswa mengalami kebuntuan, karena hanya ada satu persamaan dengan dua variabel, padahal yang dipikirkan oleh siswa biasanya untuk menyelesaikan persamaan dua variabel harus memiliki dua persamaan. Karena hanya ada satu persamaan dua variabel, siswa menganggap suatu kejanggalan. Karena itu defragmentasi yang dilakukan adalah memunculkan skema makna dengan memberikan *scaffolding*. Makna persamaan dimunculkan lebih awal melalui wawancara secara mendalam seperti berikut.

P: *apa yang sedang kamu pikirkan, kok diam lama?*

S: *bentuk ini merupakan persamaan dua variabel, tapi kok hanya satu persamaan. Biasanya kalau ada persamaan dua variabel supaya bisa diselesaikan harus ada dua persamaan*

P: *oh gitu. Apa sebenarnya makna dari* $4l + 3k = 27$?

S: *persamaan linear dua variabel*

P: *Kapan persamaan* $4l + 3k = 27$ *bernilai benar dan kapan bernilai salah?*

S: *Ehm...* (siswa berpikir agak lama)... *Apa maksudnya?*

P: *Kalau misalnya dipilih* $l = 1$ *dan* $k = 2$, *apakah persamaan* $4l + 3k = 27$ *benar?*

S: *hasilnya* $4 \times 1 + 3 \times 2 = 10$, *tidak sama dengan 27. Berarti salah*

P: *Bagaimana hubungannya dengan masalah yang sedang kamu selesaikan*

S: *oh ya, sekarang saya tahu bagaimana caranya. Saya harus mencoba-coba. Kalau* $l = 1$, *maka* $3k = 27\text{-}4 = 23$, *dan diperoleh k bilangan pecahan 23/3. Ini gak mungkin*

P: *kenapa gak mungkin?*

S: *karena banyaknya kumbang pasti 1, 2, 3, ...*

P: *mungkinkah 0?*

S: *ya, kalau kumbangnya gak ada berarti 0*

P: *terus bagaimana kelanjutannya, berapa banyak laba-laba dan kumbang yang mungkin?*

S: (siswa membuat coretan pengerjaan). *Kalau* $l = 2$ *juga gak mungkin. Nah ini benar* (sambil menunjuk hasil kerjanya). *Kalau* $l = 3$, *maka* $3k = 27 - 12 = 15$ *dan diperoleh* $k = 5$. *Jadi laba-laba sebanyak 3 ekor dan kumbang sebanyak 5 ekor*

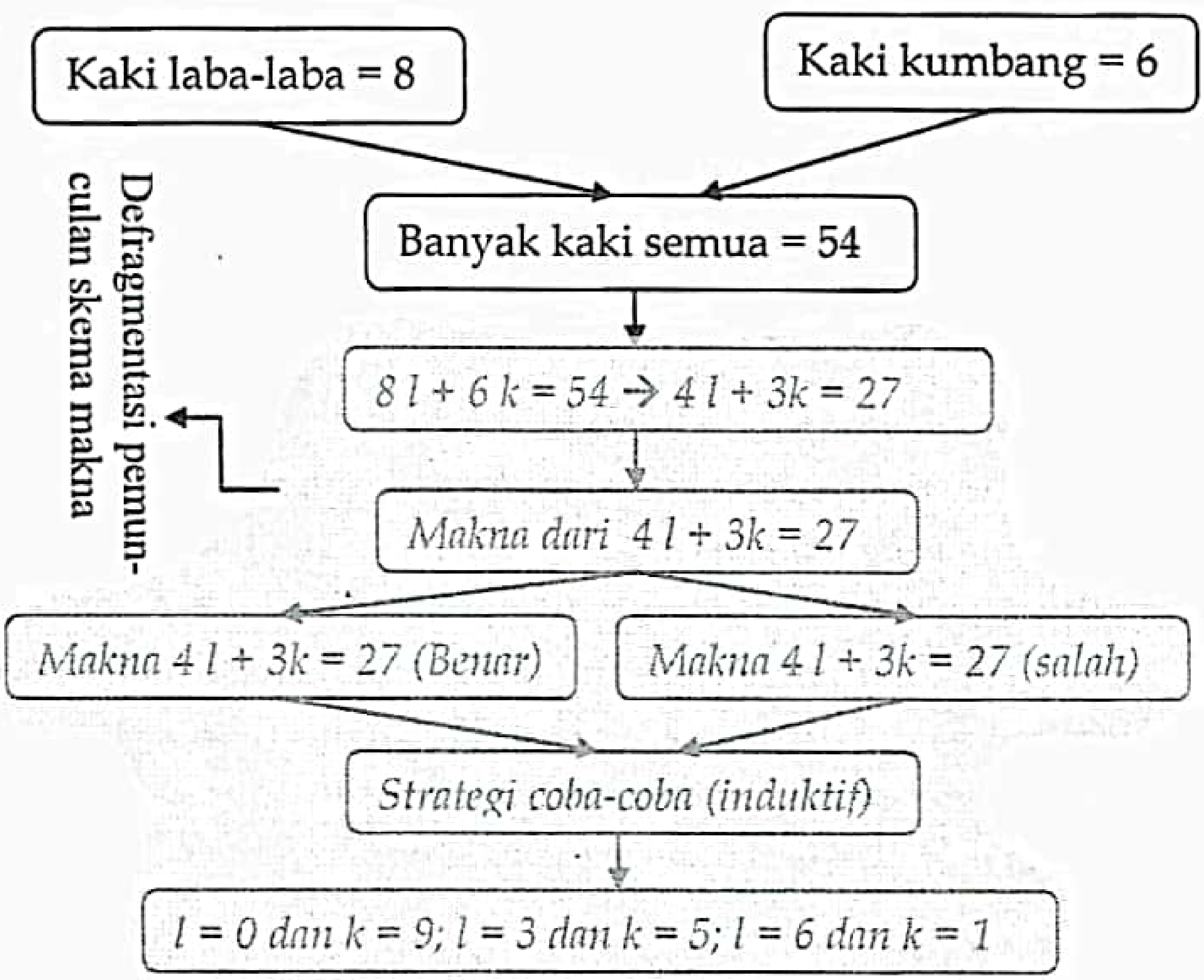
P: *apakah mungkin masih ada jawaban lain?*

S: *oh ya, kalau semua kumbang, maka banyaknya kumbang ada 9 ekor*

P: *mungkinkah masih ada jawaban lain lagi?*

S: *ehm...* (siswa mencoba banyak bilangan)... *ini juga benar, kalau laba-labanya 6 ekor, kumbangnya 1 ekor. Jadi hanya 3 kemungkinan itu yang bisa: laba-laba 0 dan kumbang 9; laba-laba 3 ekor dan kumbang 5 ekor; laba-laba 6 ekor dan kumbang 1 ekor*

Dari dialog tersebut, nampak bahwa dengan defragmentasi "pemunculan skema makna" persamaan, konstruksi pemecahan masalah menjadi benar. Dengan scaffolding pemunculan skema makna terkait dengan penyelesaian sebagai nilai variabel yang menyebabkan persamaan bernilai benar menjadikan siswa bisa melanjutkan ke penyelesaian yang benar. Adapun proses defragmentasi pemunculan skema makna dapat digambarkan seperti berikut.



BAB VI
RINGKASAN DAN DISKUSI

Fragementasi struktur berpikir diadopsi dari istilah fragmentasi di komputer yang terkait dengan proses penyimpanan data di komputer. Fragmentasi di komputer diartikan sebagai fenomena di ruang penyimpanan yang digunakan secara tidak efisien, mengurangi kapasitas penyimpanan. Fragmentasi dalam penyimpanan data akan menghambat memori kerja komputer. Fragmentasi berpengaruh "menghambat" kerja komputer, kerja komputer menjadi lambat dan memakan tempat penyimpanan data yang lebih besar. Untuk mengatasi hal tersebut, biasanya dilakukan defragmentasi (lebih familiar dengan istilah "didefrag"), yakni penataan kembali penyimpanan data sehingga lebih efisien dan tidak memakan banyak tempat, dengan demikian kapasitas tempat penyimpanan yang masih bisa digunakan menjadi lebih besar.

Dalam konteks proses berpikir, fragmentasi struktur berpikir merupakan fenomena penyimpanan informasi di dalam otak yang tidak efisien sehingga menghambat proses konstruksi konsep dan pemecahan masalah matematika. Fragmentasi struktur berpikir terkait dengan proses konstruksi dan penyimpanan informasi di dalam otak manusia. Proses konstruksi terkait dengan pengolahan informasi dan penyimpanan informasi di dalam otak. Dalam proses konstruksi ada kemungkinan terjadinya gangguan, seperti konstruksi tak sempurna (lubang konstruksi, tidak terkoneksi, dan salah analogi), konstruksi semu, kesalahan konstruksi (miskonsepsi), dan sebagainya.

Adanya fragmentasi struktur berpikir (gangguan konstruksi) dapat dideteksi salah satunya melalui kesalahan siswa dalam menilai pernyataan atau dalam menyelesaikan masalah matematika. Fragmentasi struktur berpikir dapat mengganggu proses konstruksi konsep berikutnya dan mengganggu pemanggilan kembali pengetahuan yang diperlukan untuk memecahkan suatu masalah matematika. Fragmentasi struktur berpikir yang dibahas di buku ini ada empat tipe: pseudo construction, lubang konstruksi, lubang koneksi, kesalahan berpikir logis, dan kesalahan berpikir analogis. Semakin banyak fragmentasi struktur berpikir akan semakin mengganggu proses belajar siswa dalam mengonstruksi dan memecahkan masalah matematika siswa. Karena itu diperlukan upaya untuk mengatasi fragmentasi struktur berpikir tersebut, salah satunya melalui defragmentasi struktur berpikir.

Pada dasarnya, defragmentasi struktur berpikir dapat terjadi secara alami (*self-defragmentation*) melalui proses belajar, namun demikian ketika siswa belajar tidak selalu tejadi defragmentasi struktur berpikir. Untuk terjadinya *self-defragmentation* membutuhkan waktu lama. Itupun belum tentu bisa menuntaskan masalah fragmentasi struktur berpikir yang dialami, bahkan bisa jadi menambah fragmentasi yang dialaminya. Karena itu diperlukan "intervensi" dari orang yang lebih "dewasa" untuk membantu terjadinya defragmentasi struktur berpikir. "Intervensi" dapat dilakukan dengan kegiatan *scaffolding, disequlibrasi,* dan *conflict cognitive.* Dengan intervensi dapat mempercepat defragmentasi dan lebih mengarahkan defragmentasi struktur berpikir ke fragmentasi yang sesuai. Buku ini membahas defragmentasi struktur berpikir siswa dalam mengonstruksi konsep dan memecahkan masalah matematika.

A. Defragmentasi Struktur Berpikir dalam Mengonstruksi Konsep Matematika

Defragmentasi struktur berpikir siswa dalam mengonstruksi konsep matematika didasarkan pada fragmentasi struktur berpikir yang terjadi. Dalam hal ini defragmentasi struktur berpikir dalam mengonstruksi konsep matematika dapat dikelompokkan menjadi 4 (empat) macam: (1) pemunculan skema (*schema appearences*), (2) perajutan skema (*schema knitting*), (3) perbaikan berpikir logis (*repairing of logical thinking*), dan (4) perbaikan berpikir analogis (*repairing of analogical thinking*).

Pemunculan skema digunakan untuk memperbaiki fragmentasi struktur berpikir tipe konstruksi semu (*pseudo construction*) dan lubang konstruksi (*hole construction*). Defragmentasi struktur berpikir dengan pemunculan skema dilakukan pada proses mengonstruksi konsep operasi bilangan bulat, bentuk aljabar, dan konstruksi konsep luas daerah. Dalam operasi bilangan bulat, siswa "seolah-olah" dapat menentukan hasil penjumlahan dan pengurangan bilangan negatif, namun ternyata proses berpikirnya salah karena hanya menggunakan konsep hutang. Benturan terjadi ketika masalah yang dihadapi "mengurangi dengan bilangan negatif". Karena itu defragmentasi struktur berpikir dilakukan dengan membangun konsep "keteraturan dalam operasi bilangan". Dalam konsep bentuk aljabar, siswa juga mengalami fragmentasi struktur berpikir. Siswa mengonstruksi konsep variabel x dan y dengan benda, yakni buku, pensil, apel, jeruk, dan sebaginya. Fragmentasi ini mengalami benturan ketika masalah dikembangkan ke bentuk x^2, x^3, $\sqrt{x}$, dan sebagainya, karena tidak ada konsep buku kuadrat, akar buku, dan apel kuadrat. Karena itu defragmentasi struktur berpikir dilakukan dengan memunculkan skema melalui sifat operasi bilangan (distributif) dan generalisasinya. Fragmentasi struktur berpikir juga terjadi pada siswa saat mengonstruksi konsep luas daerah, di mana siswa mengonstruksi luas daerah bukan dari konsep persegi. Fragmentasi ini nampak ketika siswa mengonstruksi satuan m^2 sebagai perkalian mxm. Hal ini menunjukkan bahwa siswa mengonstruksi luas daerah bukan dari persegi satuan. Defragmentasi struktur berpikir dilakukan dengan memunculkan konsep luas daerah melalui satuan tidak baku menuju satuan baku (persegi satuan).

Perajutan skema digunakan untuk memperbaiki fragmentasi struktur berpikir tipe lubang koneksi (*connection hole*) pada materi konsep segitiga dan teorema phytagoras. Fragmentasi struktur berpikir siswa dalam mengonstruksi konsep segitiga nampak ketika siswa hanya mengonstruksi sifat segitiga secara terbatas, yakni "memiliki tiga sisi". Konstruksi sifat segitiga yang terbatas berakibat adanya kesalahan dalam menentukan segitiga dan bukan segitiga. Dalam hal ini, siswa mengalami fragmentasi struktur berpikir dengan menyatakan bahwa segitiga dapat dibentuk dengan panjang sisi 6 cm, 7 cm, dan 14 cm. Siswa tiga membuat koneksi antara panjang sisi-sisi segitiga dan gambar segitiga. Karena itu defragmentasi struktur berpikir dilakukan dengan merajut koneksi antara panjang sisi-sisi segitiga dan gambar segitiga yang "masuk akal". Defragmentasi perajutan koneksi dilakukan dengan memberikan segitiga yang ekstrim (tidak masuk akal) dengan panjang sisi 1 cm, 2 cm, dan 10 cm. Pemberian masalah ekstrim memunculkan rasa penasaran dan akhirnya siswa mengoneksikan panjang sisi-sisi segitiga dengan gambar segitiga yang "masuk akal" dan akhirnya terjadi perbaikan struktur berpikir bahwa ada syarat lain untuk terbentuknya segitiga, yakni *"jumlah sebarang panjang dua sisi segitiga harus lebih panjang dari satu sisi yang lain"*. Fragmentasi struktur berpikir lubang koneksi juga terjadi pada masalah teorema phytagoras. Siswa hanya hafal rumus tanpa ada koneksi dengan bentuk segitiganya. Defragmentasi struktur berpikir dilakukan dengan mengoneksikan rumus phytagoras, panjang sisi-sisi segitiga, dan gambar segitiga. Berdasarkan gambar segitiga yang diberikan bahwa sisi a sebagai sisi terpanjang (bukan sisi c seperti yang biasa ditemui) dan diberikan panjang sisi-sisinya dengan triple phytagoras, akhirnya tejadi conflict cognitive dan terjadi perubahan struktur berpikir "bukan rumus yang terpenting tetapi panjang sisi-sisi yang bersesuaian dengan gambar phytagoras yang lebih penting".

Perbaikan berpikir logis digunakan untuk memperbaiki fragmentasi struktur berpikir tipe kesalahan dalam berpikir logis (*mis-logical thinking*). Defragmentasi struktur berpikir logis dilakukan dengan *conflict cognitive* dan *scaffolding*. Scaffoling dilakukan dengan mengarahkan siswa untuk mencari contoh fungsi yang bertentangan dengan pernyataan yakni $f(x) = x^2$. Siswa mengambil dua bilangan 3 dan -3. Setelah mencoba $f(3) = 9$ dan $f(-3) = 9$, siswa mengalami *conflict cognitive* "ternyata ada bilangan yang berbeda tetapi kuadratnya sama" dan akhirnya terbentuk struktur berpikir baru bahwa penilaian terhadap pernyataan "misalkan f suatu fungsi. Jika $f(a) = f(b)$ maka $a = b$" adalah salah, karena ada $a = 3$ dan $b = -3$ yang berbeda tetapi $f(3) = f(-3)$. Hal ini menunjukkan secara implisit bahwa siswa sudah memperbaiki struktur berpikir logisnya, yakni **pernyataan $p \rightarrow q$ dapat diingkari dengan $p \wedge -q$**. Proses penyangkalan pernyataan $p \rightarrow q$ dilakukan dengan mengambil kasus $a \neq b$ tetapi $f(a) = f(b)$.

Defragmentasi struktur berpikir analogis dilakukan untuk memperbaiki kesalahan berpikir analogis (*mis-analogical thinking*). Defragmentasi ini dilakukan pada kasus konstruksi konsep aljabar (akar dan kuadrat). Pada masalah aljabar, siswa mengalami framentasi struktur berpikir dalam menguadratkan bentuk aljabar, dimana siswa menilai benar pernyataan $(x+y)^2 = x^2 + y^2$ dan $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$, karena dianalogikan oleh siswa dengan $(xy)^2 = x^2y^2$ dan $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$. Pada kasus fragmentasi struktur berpikir $(x+y)^2 = x^2 + y^2$, defragmentasi struktur berpikir dilakukan dengan membangun conflict cognitive melalui contoh $x = 2$ dan $y = 3$ bahwa $(2+3)^2$ ternyata berbeda dengan $2^2 + 3^2$. Pada kasus fragmentasi struktur berpikir $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$, defragmentasi struktur berpikir siswa dilakukan melakukan *conflict cognitive* dengan memberikan masalah kepada siswa $\sqrt{4} + \sqrt{4}$. Awalnya siswa masih menjawab $\sqrt{8}$. Defragmentasi dilanjutkan dengan mempertanyakan $\sqrt{4}$. *Conflict cognitive* muncul ketika siswa membandingkan $\sqrt{4} + \sqrt{4} = 2 + 2 = 4$ dengan $\sqrt{8}$, ternyata berbeda. Dengan *conflict cognitive* struktur berpikir siswa dapat diperbaiki untuk menyesuaikan dengan konsep ilmiah.

B. Defragmentasi Struktur Berpikir dalam Pemecahan Masalah Matematika

Defragmentasi struktur berpikir siswa dalam pemecahan masalah bergantung dari kompleksitas masalah yang diselesaikan. Pemecahan masalah selalu terkait dengan masalah nonrutin, sehingga kompleksitasnya cukup tinggi. Biasanya fragmentasi struktur berpikir dalam pemecahan masalah juga kompleks, bahkan seringkali memuat berbagai fragmentasi yang ada dalam proses konstruksi konsep, seperti konstruksi semu (*pseudo construction*), lubang konstruksi (*hole construction*), lubang koneksi (*connection hole*), kesalahan dalam berpikir logis (*mis-logical thinking*), dan kesalahan berpikir analogis (*mis-analogical thinking*). Selain fragmentasi-fragmentasi tersebut, ada fragmentasi yang khas dalam pemecahan masalah, yakni defragmentasi pemunculan koneksi dan pemunculan makna.

Pemunculan koneksi nampak pada saat defragmentasi struktur berpikir siswa dalam menyelesaikan masalah berikut.

Dua lingkaran masing-masing berjari-jari 7 cm dan 2 cm. Panjang garis singgung persekutuan luarnya adalah 12 cm. Jika A dan B masing-masing merupakan titik-titik sudut di suatu persegi sehingga A pada lingkaran pertama dan B berada pada lingkaran kedua, maka tentukan luas daerah terkecil dari persegi tersebut!

Dalam menyelesaikan masalah tersebut siswa siswa sudah memiliki skema terkait dengan garis singgung persekutuan dua lingkaran dan jarak dua titik. Fragmentasi struktur berpikir siswa tersebut adalah tidak bisa membuat koneksi (*nothing connection*) satu masalah dengan masalah lain. Proses berpikir yang dominan pada siswa adalah berpikir prosedural. Siswa mampu menyelesaikan masalah yang membutuhkan berpikir prosedural tetapi gagal ketika masalah yang disajikan non rutin. Ketika sudah memperoleh jawaban panjang garis singgung, siswa tidak bisa mengaitkan dengan titik A dan titik B yang ada pada lingkaran. Defragmentasi struktur berpikir tentang kesalahan menempatkan titik A dan B dilakukan dengan *conflict cognitive*, pemunculan skema, dan pemunculan koneksi melalui proses menggali makna lingkaran dan daerah lingkaran. Dengan *conflict cognitive,* struktur berpikir siswa muncul tentang kesalahan memahami lingkaran dan kesalahan menempatkan titik A dan titik B. Dalam struktur berpikir siswa ada proses defragmentasi pemunculan koneksi, yakni hubungan antara titik A, titik B, jarak kedua lingkaran, dan gambar persegi dirajut menjadi bahan memecahkan masalah.

Defragmentasi struktur berpikir "pemunculan skema makna" terungkap dari proses penyelesaian masalah open ended berikut.

Seorang anak mengumpulkan laba-laba dan kumbang di dalam sebuah kotak, kemudian dia menghitung jumlah kaki-kakinya. Ternyata banyak kaki laba-laba dan kumbang adalah 54. Jika laba-laba kakinya 8 dan kumbang kakinya 6, maka tentukan kemungkinan banyaknya laba-laba dan kumbang yang dikumpulkan!

Dalam menyelesaikan masalah tersebut, banyak laba-laba dengan l dan banyak kumbang dengan k serta diperoleh satu persamaan yang sudah disederhanakan $4\,l + 3\,k = 27$. Siswa mengalami kebuntuan, karena hanya diketahui satu persamaan yang memuat dua variabel. Yang biasa dihadapi kalau ada persamaan dua variabel harus ada dua persamaan, karena biasanya disebut sistem persamaan. Defragmentasi struktur berpikir pemunculan skema makna terjadi ketika ada intervensi terkait dengan makna persamaan dan makna penyelesaian dari persamaan. Dengan munculnya makna persamaan bernilai benar dan persamaan bernilai salah, siswa bisa merestrukturisasi berpikirnya dengan mengarah pada cara coba-coba kemungkinan penyelesaian yang masuk akal. Dengan scaffolding pemunculan skema makna terkait dengan penyelesaian sebagai nilai variabel yang menyebabkan persamaan bernilai benar menjadikan siswa bisa melanjutkan ke penyelesaian yang benar.

C. Diskusi

Defragmentasi struktur berpikir merupakan proses penataan struktur berpikir melalui intervensi terbatas. Intervensi sangat penting untuk bisa membantuk siswa dalam proses restrukturisasi. Hal ini sesuai dengan pendapat Blanton dkk (2015) bahwa intervensi dapat membantu perkembangan berpikir aljabar siswa. Dyson dkk (2015) mengaji intervensi number sense pada siswa berkemampuan rendah, ditemukan bahwa intervensi sangat membantu perkembangan *number sense* siswa berkemampuan rendah dalam belajar bilangan terutama dalam mengembangkan berpikir siswa untuk peka terhadap bilangan dan operasinya. Pengembangan berpikir siswa sangat penting dan menjadi perhatian dalam pembelajaran matematika. Leathams & Peterson, dkk (2015) menjelaskan tentang pentingnya perkembangan berpikir matematis siswa dalam pembelajaran matematika. Orientasi pembelajaran matematika perlu diarahkan untuk pengembangan berpikir matematis siswa.

Kenyataannya dalam proses belajar, siswa masih mengalami kesalahan dalam mengonstruksi konsep dan memecahkan masalah matematika. Kesalahan dalam proses konstruksi konsep dan pemecahan masalah telah dikaji oleh banyak ahli (Brodie, 2010; Shein, 2012; Gal & Linchevski, 2010; Bingolbali, dkk, 2010, Subanji, 2015; Subanji & Toto Nusantara, 2016, Fernandez, 2016). Proses terbentuknya kesalahan perlu mendapat perhatian agar dapat dicarikan langkah penyelesaian sedemikian hingga kesalahan tersebut tidak terulang kembali. Salah satu kajian yang dapat dilakukan adalah menganalogikan dengan proses terbentuknya fragmentasi pengolahan dan penyimpanan data di komputer. Analogi ini didasari oleh pemikiran bahwa di dalam kognisi manusia ada proses pengolahan dan penyimpanan informasi yang berlangsung secara terus menerus, sehingga fragmentasi juga bisa terjadi dalam proses berpikir siswa yang selanjutnya disebut fragmentasi struktur berpikir. Penelusuran kesalahan siswa melalui proses pemetaan fragmentasi struktur berpikir akan membantu mempermudah restrukturisasi atau yang disebut dengan defragmentasi struktur berpikir.

Defragmentasi struktur berpikir dilakukan dengan tiga proses utama, yakni *scaffolding*, pengondisian disequilibrasi, dan *conflict cognitive*. *Schaffolding* dalam proses mengonstruksi konsep matematika merupakan aktifitas intervensi dengan memberikan bantuan secukupnya kepada siswa agar mampu melakukan proses konstruksi konsep matematika. Anghileri (2006) menemukan ada tiga level *scaffolding*, yakni (1) ***environmental provisions, (2) explaining, reviewing and restructuring, dan (3) developing conceptual thinking***. Peretz (2006) menjelaskan bahwa *scaffolding* dapat digunakan untuk mendorong penalaran matematis siswa.

Disequilibrasi pada dasarnya terjadi pada diri pebelajar (siswa) dan dapat dimunculkan dengan memberi-kan intervensi untuk merefleksikan hasil konstruksinya termasuk menelusuri dan membandingkan hasil kerjanya dengan konsep ilmiah. Ketika intervensi yang dilakukan dapat menimbulkan pertentangan dengan konsep ilmiah dan disadari oleh siswa, maka siswa mengalami *conflict cognitive*. Karena itu *conflict cognitive* merupakan bagian dari *schaffolding* dan disequilibrasi. *Conflict cognitive* dapat terjadi, salah satunya dengan adanya intervensi dari orang lain yang "lebih dewasa". *Conflict cognitive* seringkali efektif untuk melakukan defragmentasi struktur berpikir siswa dengan menyadarkan siswa akan adanya fragmentasi struktur berpikir pada dirinya. Dengan demikian akan terjadi proses defragmentasi struktur berpikir dalam mengonstruksi konsep dan pemecahan masalah matematika.

Pada dasarnya defragmentasi struktur berpikir masih perlu banyak dikaji dalam proses konstruksi dan pemecahan masalah untuk berbagai materi matematika. Hal ini didasari oleh pemikiran bahwa fragmentasi struktur berpikir siswa bisa terjadi dalam mengonstruksi konsep di hampir semua materi matematika. Sementara dalam buku ini materi yang dijadikan bahan untuk mendeteksi fragmentasi dan defragmentasi struktur berpikir masih sangat terbatas, yakni operasi bilangan bulat, bentuk aljabar, segitiga dan phytagoras, serta fungsi dan himpunan. Selanjutnya masih banyak materi yang penting tetapi belum menjadi bahan kajian di buku ini, diantaranya pecahan, perbandingan, barisan bilangan, dan sebagainya. Karena itu masih membuka peluang adanya kajian untuk materi matematika yang lebih luas lagi. Meskipun cakupan materi dalam kajian buku ini masih relatif sedikit, namun kajian fragmentasi dan defragmentasi struktur berpikir yang disajikan sudah sangat mendalam, sehingga bisa dijadikan pola kajian untuk materi yang lain.

KEPUSTAKAAN

Anghileri, Julia, 2006. Scaffolding Practices That Enhance Mathematics Learning. *Journal of Mathematics Teacher Education* Vol 9: pp. 33–52

Bingolbali, E., Akkoç, H, Ozmantar M. F., & Demri, S. (2011). Pre-service and in-service teachers' views of the sources of students' mathematical difficulties. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 6(1), 40-59.

Blanton M., Stephens A., Knuts E., Gardiner, A.M., Isler I., Kim, J.S., 2015. The Development of Children's Algebraic Thinking: The Impact of a Comprehensive Early Algebra Intervention in Third Grade. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 46, No. 1, 39–87

Brodie, karin, 2010. Teaching Mathematical Reasoning in Secondary School Classrooms. Springer New York Dordrecht Heidelberg London

Carlson, M.; Jacobs, S.; Coe, E.; Larsen, S.& Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *J. Res. Math. Educ.* 33(5), 352–378. ME 2011e.00792

Dreifus & Kidron, 2010. Justification enlightenment and combining constructions of knowledge. *Educ Stud Math* (2010) 74:75–93

Dyson, N., Jordan, N.C., and Beliakoff A., Hassinger-Das, B., 2015. A Kindergarten Number-Sense Intervention With Contrasting PracticeConditions for Low-Achieving Children. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 46, No. 1, 331-370

Fernández, Gracia Jiménez. 2016. How can I help my students with learning disabilities in mathematics? –

REDIMAT Journal of Research in Mathematics Education. Volume 5 Number 1, 56-73

Gal and Linchevski, 2010. To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. Education Study Math, 74:163–183

Jacobs, 2003. The Evolution of the Cognitive Maps. *Brain Behavior E-vol* 2003;62:128–139

Komf & Denicollo, 2005. Teacher Thinking Twenty Years on: Revisiting Persisting Problem and Advances in Education. Swetz & Zeitlinger Publisher. Tokyo

Leatham, K. R., and Peterson, B.E., Stockero, S.L., Zoest R.L., 2015. Conceptualizing Mathematically Significant Pedagogical Opportunities to Build on Student Thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 46, No. 1, 88–124

Leron, U.& Hazzan, O. 2009. Intuitive vs analytical thinking: four perspectives. *Educ Stud Math*. 71(3), 263–278. ME 2009f.00534

Lithner, J., 2000. Mathematical Reasoning in Task Solving. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 41 pages 165-190

Musser, G.,L, Burger, W.F, Peterson, B.E., 2011. *Mathematics for Elementary Teachers a Contemporary Approach*. Wiley: New York

NCTM, 2000. *Principles and Standards for School Mathematics*. NCTM.

Pape, S., 2004. Middle School Children's Problem solving Behavior: A Cognitive Analysis from A Reading Comprehension Perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 35 Number 3 May 2004.

Pena, Sossa, &Gutierres, 2007. Cognitive Map: an Overview and Their Application for Student Modeling. *Computacion Sistemas*. Vol 10 No 3.

Perdikaris, 2012. Using the Cognitive Styles to Explain an Anomaly in the Hierarchy of the van Hiele Levels. *Journal of Mathematical Sciences & Mathematics Education,* Vol. 6 No. 2

Peretz, Dvora, 2006. Enhancing Reasoning Attitudes Of Prospective Elementary School Mathematics Teacher. *Journal of Mathematics Teacher Education*. Vol 9: pp. 381-400

Shein. 2012. Seeing With Two Eyes: A Teacher's Use f Gestures in Questioning and Revoicing to Engage English Language Learner in Reapir of Mathematical Errors. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol 43 no 2

Subanji, 2007. *Proses Berpikir Pseudo Penalaran Kovariasional Mahasiswa dalam Mengonstruksi Grafik Fungsi Kejadian Dinamik. Disertasi.* Tidak dipublikasikan. UNESA Surabaya.

Subanji and Supratman. 2015. The Pseudo-Covariational Reasoning Thought Processes in Constructing Graph Function of Reversible Event Dynamics Based on Assimilation and Accommodation Frameworks. *Journal of the Korean Society of Mathematical Education* Series D: Research in Mathematical Education. Volume 19 Number 1 (March 2015)

Subanji dan Nusantara, T. 2013. Karakterisasi Kesalahan Berpikir Siswa dalam Mengkonstruksi Konsep Matematika. *Jurnal Ilmu Pendidikan* (JIP). 19(2). 2018 - 217.

Vinner, S. 1997. The pseudo-conceptual and the pseudo-analytical thought processes in mathematics Learning. *Educational Studies in Mathematics* 34, pp. 97-129.

GLOSARIUM

Fragmentasi struktur berpikir merupakan fenomena penyimpanan informasi di dalam otak yang tidak efisien sehingga menghambat proses konstruksi konsep dan pemecahan masalah matematika.

Defragmentasi struktur berpikir merupakan fenomena perubahan tatanan skema (struktur berpikir) dalam rangka memperbaiki fragmentasi struktur berpikir.

Konstruksi semu (*pseudo construction*) merupakan proses pembentukan konsep matematika "seakan-akan" sesuai dengan konsep ilmiah setelah ditelusuri lebih dalam (*indept interview*) ternyata tidak sesuai dengan konsep ilmiah.

Lubang konstruksi merupakan proses pembentukan konsep matematika tidak sempurna, dalam pembentukan konsep ada bagian dari konsep yang tidak terkonstruksi.

Lubang koneksi merupakan proses pembentukan konsep matematika, dimana bagian-bagian konsep telah terkonstruksi namun belum ada koneksi antar bagian konsep.

Kesalahan berpikir analogis merupakan proses pembentukan konsep matematika melalui analogi, namun ada penyimpangan dalam penggunaan berpikir analogis.

Kesalahan berpikir logis merupakan proses pembentukan konsep matematika melalui berpikir logis, namun ada penyimpangan dalam penggunaan kaidah logika.

Pemunculan skema (*schema appearences*) merupakan defragmentasi struktur berpikir matematis yang dilakukan dengan memunculkan skema yang diperlukan dalam pembentukan konsep atau pemecahan masalah melalui *scaffolding*, disequlibrasi atau *conflict cognitive*.

Perajutan skema (*schema knitting*) merupakan defragmentasi struktur berpikir matematis yang dilakukan dengan menghubungkan skema yang diperlukan dalam pembentukan konsep atau pemecahan masalah melalui *scaffolding*, disequlibrasi atau *conflict cognitive*.

Perbaikan berpikir logis merupakan defragmentasi struktur berpikir matematis yang dilakukan dengan pembentukan berpikir logis yang diperlukan dalam pembentukan konsep atau pemecahan masalah melalui *scaffolding*, disequlibrasi atau *conflict cognitive*.

Perbaikan berpikir analogis merupakan defragmentasi struktur berpikir matematis yang dilakukan dengan pembentukan berpikir analogis yang sesuai yang diperlukan dalam pembentukan konsep atau pemecahan masalah melalui *scaffolding*, disequlibrasi atau *conflict cognitive*.

Scaffolding merupakan intervensi yang dilakukan dengan pemberian bantuan secukupnya kepada siswa agar mampu melanjutkan pembentukan konsep matematis atau pemecahan masalah matematika.

Disequilibrasi merupakan intervensi yang dilakukan dengan membuat ketidakseimbangan antara asimilasi dan akomodasi, sehingga terjadi perbaikan struktur berpikir dalam pembentukan konsep matematis atau pemecahan masalah matematika.

Conflict Cognitive merupakan intervensi yang dilakukan dengan membuat konflik antara yang sudah disimpan dalam memory dan apa yang dilakukan sedang dilakukan sehingga terjadi perbaikan struktur berpikir dalam pembentukan konsep matematis atau pemecahan masalah matematika.

Asimilasi merupakan proses penggabungan (*incorporation*) stimulus baru ke dalam skema yang sudah terbentuk. Proses penggabungan ditandai dengan tindakan menginterpretasi secara langsung stimulus yang diterima.

Akomodasi merupakan proses pengintegrasian stimulus baru melalui pengubahan skema lama atau pembentukan skema baru untuk menyesuaikan dengan stimulus yang diterima.

INDEKS

Dr. H. Subanji, M.Si. lahir 5 Juni 1971 di Desa Tambibendo – Kecamatan Mojo – Kabupaten Kediri. Staf Pengajar di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Malang. Riwayat Pendidikan: D3 dan S1 Pendidikan Matematika IKIP MALANG, S2 Matematika ITB, S3 Pendidikan Matematika UNESA. Salah satu pendiri Pondok Pesantren Modern dan Perguruan Surya Buana Malang.

Buku ini menyajikan tentang: (1) pentingnya proses konstruksi dalam belajar matematika, (2) bagaimana terjadinya fragmentasi struktur berpikir siswa dalam mengonstruksi konsep dan memecahkan masalah matematika, dan (3) bagaimana memperbaiki fragmentasi berpikir siswa melalui defragmentasi struktur berpikir siswa.

Dari kajian defragmentasi struktur berpikir siswa dalam mengonstruksi dan konsep dan memecahkan masalah matematika tersebut, ditemukan 4 (empat) teori defragmentasi struktur berpikir. TEORI 1: Defragmentasi struktur berpikir tipe pemunculan skema untuk memperbaiki fragmentasi lubang konstruksi dan pseudo konstruksi. TEORI 2: Defragmentasi struktur berpikir tipe pemunculan atau perajutan skema untuk memperbaiki fragmentasi ketiadaan atau kesalahan koneksi. TEORI 3: Defragmentasi struktur berpikir analogis untuk memperbaiki fragmentasi kesalahan analogi. TEORI 4: Defragmentasi struktur berpikir logis untuk memperbaiki fragmentasi kesalahan berpikir logis.

ISBN 9789794958759

9 789794 958759

Anggota IKAPI No. 059 JTI 89