

# Vehicle Routing Problem with Time Windows Variants and its Application in Distribution Optimization

Sapti Wahyuningsih, Darmawan Satyananda, Lucky Tri Octoviana, Rini Nurhakiki. Jurusan Matematika FMIPA, Universitas Negeri Malang, Indonesia.

[sapti.wahyuningsih.fmipa@um.ac.id](mailto:sapti.wahyuningsih.fmipa@um.ac.id)

## Abstrak

Salah satu topik penerapan teori graph adalah Vehicle Routing Problem (VRP) dan variannya. Topik ini merupakan combinatorial optimization problem yang dapat diaplikasikan pada masalah optimalisasi distribusi. Pada optimalisasi distribusi, tambahan batasan (constraints) time windows merupakan bahasan yang penting untuk dianalisa. VRPTW adalah varian VRP dengan tambahan constraints berupa time windows. Identifikasi perbedaan constraints pada varian VRPTW, deskripsi formulasi varian VRPTW, dan metode/algorithm untuk menyelesaikannya merupakan isu yang penting untuk dibahas. Rancangan kajian ini adalah deskriptif kualitatif dengan mengidentifikasi data-data berupa titik graph sebagai depot atau customer, bobot sisi graph sebagai jarak depot ke customer atau antar customer, banyak kendaraan, kapasitas kendaraan, dan time windows masing-masing customer. Selanjutnya dilakukan identifikasi data dengan varian yang disesuaikan, mendeskripsikan formulasi matematikanya, memecahkan masalah dengan algoritma, menganalisa hasil pemecahan masalah dan menginterpretasikan hasilnya. Varian VRPTW yang dibahas adalah VRPBTW, CVRPTW, SDVRPTW, MTSDVRPTW, VRPSPDTW, VRPPDTW, dan MDVRPPDTW. Pemecahan masalah varian VRPTW dengan algoritma sequential insertion dan implementasinya dalam program komputer dengan bahasa Delphi dikaji pada studi ini. Mengetahui perbedaan varian ini diperlukan dalam memodelkan masalah nyata ke dalam formulasi matematika dan bermanfaat pada penyelesaian masalah optimalisasi distribusi. Implikasi hasil pembahasan diperlukan mahasiswa yang sedang melaksanakan PKL di Industri.

**Kata Kunci:** VRPTW, varian VRPTW, formulasi matematika VRPTW, algoritma sequential insertion, dan optimalisasi distribusi.

## 1. Pendahuluan

Dalam kehidupan sehari-hari terdapat berbagai permasalahan yang dapat diselesaikan dengan penerapan teori graph misalnya permasalahan optimasi distribusi. Permasalahan distribusi pada teori graph dapat dimodelkan dengan *Vehicle Routing Problem* (VRP). Permasalahan VRP pada distribusi adalah bagaimana cara menentukan rute yang optimum dari sekumpulan kendaraan dalam mengantarkan pesanan ke banyak pelanggan (*customer*) dari depot. Rute-rute diatur sedemikian rupa, sehingga setiap pelanggan hanya dikunjungi oleh tepat satu kendaraan dengan setiap rute berawal dan berakhir di depot, dengan total

permintaan dari semua pelanggan dalam satu rute tidak boleh melebihi kapasitas kendaraan.

Pada identifikasi masalah di lapangan terdapat berbagai variabel yang belum bisa diselesaikan dengan VRP asli atau VRP klasik sehingga berkembang varian dari VRP. Aplikasi yang dijumpai di masalah nyata misalnya jalan searah atau dua arah akan berpengaruh pada pemilihan varian VRP. Untuk rute dengan jalan searah dapat menggunakan model asimetrik sebagai contoh asimetrik varian VRP dapat dilihat pada [1]. Riset tentang varian VRP terus dilakukan baik dari sudut pandang teori maupun aplikasinya. Dari sudut pandang teori misalnya dapat dilihat pada [2], sedangkan dari sudut aplikasinya dapat dilihat pada [3-5].

Varian VRP dengan tambahan *time windows* dikenal dengan *Vehicle Routing Problem with Time Windows* (VRPTW). *Time windows* sendiri bisa diartikan sebagai batasan waktu beroperasinya customer, atau batasan waktu suatu kendaraan bisa mengunjungi *customer*. Beberapa penelitian terkait algoritma yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan VRPTW misalnya algoritma *improved differential evolution* [3], metode stocastic [4], dan algoritma berbasis VNS (Dahri et al, 2016). [5], metode ACO *hybrid metaheuristic* dengan constrain *fuzzy* pada VRPTW [6], serta penelitian VRPTW tentang local search dengan *simulated annealing* dapat dilihat pada [7].

Pada aplikasi varian VRPTW yang lebih kompleks memunculkan variabel tambahan pada model matematikanya. Varian VRPTW dengan tambahan constrain *backhauls* (pengembalian barang) dan *time windows* memunculkan varian VRPBTW (Capacitated Vehicle Routing Problem with Time Windows), yang dapat dilihat pada [8]. Riset varian VRPTW dengan tambahan kapasitas kendaraan dikenal dengan Capacitated Vehicle Routing Problem with Time Windows, dapat dilihat pada [1], [4], [5] dan [9]. Varian VRPTW dengan menambah kendala Split-Delivery dikenal dengan Multi-Trip Split-Delivery Vehicle Routing Problem with Time Windows (MTSDVRPTW) [10]. Varian VRPTW yang merupakan pengembangan MDVRP yaitu MDVRPTW dibahas pada [2] dan [11]. Varian VRPTW yang merupakan pengembangan MDVRP dan VRPPD yaitu Multi-Depot Vehicle Routing Problem with Pick-up and Delivery and Time windows (MDVRPPDTW) [12]. Pengembangan VRPTW dengan multi objektif yaitu Multi-Objective Vehicle Routing Problem with Time Windows dealing with Perishability (MO-VRPTW-P) dapat dilihat pada [11]

Tujuan penulisan ini adalah mengidentifikasi perbedaan kendala pada varian VRPTW, menunjukkan perbedaan formulasi varian VRPTW, mengidentifikasi langkah prinsip algoritma *Ant Colony optimization* (ACO), algoritma *Artificial Bee Colony* (ABC) dan algoritma *sequential insertion* dan memberikan contoh aplikasi varian VRPTW pada komputer. Pada pembahasan varian VRPTW ini dikaji perbedaan dari varian-varian tersebut. Pembahasan varian VRPTW ini diperlukan dalam aplikasi pada masalah real. Untuk memberi gambaran penyelesaiannya diberikan penyelesaian varian VRPTW dengan algoritma *sequential insertion*. Studi varian VRPTW ini bermanfaat pada penyelesaian masalah optimalisasi distribusi. Khususnya diperlukan mahasiswa terapan matematika yang sedang melaksanakan PKL di Industri.

## 2. Metode

Tipe studi ini adalah diskriptif kualitatif dengan data-data berupa titik graph sebagai depot atau *customer*, bobot sisi graph sebagai jarak depot ke *customer* atau antar *customer*, banyak kendaraan, kapasitas kendaraan, dan *time windows* masing-masing *customer*. Prosedur untuk menyelesaikannya dengan cara mengidentifikasi varian VRPTW sesuai permasalahan pada permasalahan real dan mengidentifikasi kendala-kendala yang bersesuaian. Selanjutnya memodelkan masalah nyata ke dalam model graph dan pemilihan algoritma. Pemecahan masalah dengan mengimplementasikan ke program komputer menggunakan Delphi dengan cara menginputkan data, memproses penyelesaian dengan algoritma, dan menentukan solusi optimal. Langkah terakhir adalah menganalisa hasil pemecahan masalah pada tampilan program dan menginterpretasi hasil pemecahan masalah nyata.

## 3. Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini diuraikan jenis varian VRPTW, formulasi VRPTW dan variannya. Diuraikan prinsip dasar algoritma *Ant Colony optimization* (ACO), algoritma *Artificial Bee Colony* (ABC) dan algoritma *sequensial insertion* untuk menyelesaikan VRPTW dan variannya. Diberikan contoh penyelesaian masalah VRPTW menggunakan program Delphi berupa aplikasi

TSP-VRP sebagaimana yang dibahas pada [13].

### 3.1. Jenis-jenis varian VRPTW

Pengembangan varian VRPTW disesuaikan dengan tambahan kendala yang diperlukan. Berikut diberikan beberapa varian VRPTW.

#### 1. VRP with Backhauls and Time Windows (VRPBTW)

Varian ini merupakan pengembangan permasalahan VRP with Backhauls (VRPB) dengan tambahan *time windows*. Pada umumnya kasus VRP adalah pengantaran, dalam VRPB terdapat juga pengambilan barang dari *customer*. Dalam setiap rute kendaraan, pengambilan dilakukan setelah semua pengiriman ke *customer* selesai dilakukan dan terdapat penambahan *time window* pada masing-masing *customer* untuk dapat menerima barang. Penyelesaian VRPBTW dengan algoritma meta-heuristic dapat dilihat pada [14].

#### 2. Capacitated VRPTW (CVRPTW)

Varian ini merupakan modifikasi dari *Capacitated Vehicle Routing Problem* (CVRP) dan VRPTW. Varian ini memiliki batasan bahwa permintaan *customer* dalam satu rute dibatasi oleh kapasitas kendaraan (sesuai karakteristik CVRP) dan adanya penambahan *time window* pada masing-masing *customer* untuk dapat menerima barang. Penyelesaian CVRPTW dengan algoritma heuristic dapat dilihat pada [9]. Perbaikan solusi CVRP dengan local search dengan memanfaatkan Google Map telah dikaji dapat dilihat pada [15]. Untuk kasus rute yang melewati jalan searah dapat digunakan masalah asimetrik CVRP dapat dilihat [1].

#### 3. Split delivery VRPTW (SDVRPTW)

Varian ini merupakan pengembangan dari SDVRP yaitu adanya permintaan yang melebihi kapasitas kendaraan, sehingga bisa dibagi ke dalam satuan yang lebih kecil (*split delivery*) dengan tambahan *time window* pada masing-masing *customer* untuk dapat menerima barang. Pembahasan masalah SDVRPTW dan solusinya dengan *delivery domain* dapat dilihat pada [16].

#### 4. Multi Trip Split Delivery VRPTW (MT SDVRPTW)

Varian ini merupakan pengembangan Multi Trip VRP dan SDVRPTW. Pembahasan MT SDVRPTW dengan Inventory Replenishment Under Stochastic Travel Times dapat dilihat pada [10].

#### 5. VRP with Simultaneous Pickups and Deliveries (VRPSPDTW)

Varian ini pengembangan dari VRP with Simultaneous Delivery and Pickup (VRPSDP) yaitu melakukan pengantaran dan pengambilan secara bersamaan dan tambahan *time window* pada masing-masing *customer* untuk dapat menerima barang.[3]

#### 6. Multi-Depot Vehicle Routing Problem and Time Windows (MDVRPTW)

Varian ini pengembangan dari Multiple Depot VRP (MDVRP) yaitu terdapat lebih dari satu depot untuk melayani customer dan adanya penambahan *time window* pada masing-masing *customer*. Pembahasan MDVRPTW under shared depot resources dapat dilihat pada [17]

#### 7. Vehicle routing problem with pick-up and delivery and time windows (VRPPDTW).

Varian ini pengembangan dari Vehicle routing problem with pick-up and delivery dengan tambahan *time windows*. Penentuan solusi optimal VRPPDTW dapat dilihat pada [18]

#### 8. Multi-depot vehicle routing problem with pick-up and delivery and time windows (MDVRPPDTW).

Varian ini pengembangan Multi-depot vehicle routing problem with pick-up and delivery (MDVRPPD) dengan tambahan *time windows*. Pembahasan MDVRPPDTW dengan dynamic programming dapat dilihat [18].

Pengetahuan tentang jenis-jenis varian VRPTW diperlukan dalam menyusun formulasi matematikanya. Berikut diberikan formulasi matematika VRPTW dan variannya.

### 3.2. Formulasi Matematika VRPTW dan variannya

Formulasi matematika untuk permasalahan VRPTW yang bertujuan meminimalkan total jarak tempuh atau biaya perjalanan dengan sejumlah outlet [19] adalah sebagai berikut:

Fungsi tujuan

$$\min \sum_{k \in V} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij}^k$$

Dengan:

$$x_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{jika kendaraan } k \text{ dijalankan dari titik } i \text{ ke } j, i \neq j \\ 0, & \text{untuk yang lain} \end{cases}$$

Dengan batasan-batasan sebagai berikut:

Batasan 1. Setiap outlet hanya dikunjungi oleh satu kendaraan

$$\sum_{k \in V} \sum_{i \in N} x_{ij}^k = 1, \quad \forall j \in N \setminus \{0\}$$

Batasan 2. Total permintaan dari setiap outlet dalam satu rute tidak boleh melebihi kapasitas kendaraan

$$\sum_{i \in N \setminus \{0\}} \sum_{j \in N} x_{ij}^k \leq Q, \quad \forall k \in V$$

Batasan 3. setiap kendaraan meninggalkan outlet yang telah dikunjungi

$$\sum_{i \in N} x_{ih}^k - \sum_{j \in N} x_{hj}^k = 0, \quad \forall h \in N \setminus \{0\}, \forall k \in V$$

Batasan 4. Setiap kendaraan yang meninggalkan depot harus kembali ke depot

$$\sum_{j \in N \setminus \{0\}} x_{0j}^k = 1, \quad \forall k \in V$$

$$\sum_{j \in N \setminus \{0\}} x_{j0}^k = 1, \quad \forall k \in V$$

Batasan 5. Kendaraan  $k$  tidak bisa datang di customer  $j$  sebelum waktu yang ditentukan

$$s_{ik} + t_{ij} - K(1 - x_{ijk}) \leq s_{jk}, \quad \forall i, j \in N, \quad \forall k \in V$$

Batasan 6. Kendaraan hanya bisa berada di customer pada batasan waktu yang ditentukan

$$a_i \leq s_{ik} \leq b_i, \quad \forall i \in N, \quad \forall k \in V$$

Formulasi varian VRPTW dikembangkan dengan menyesuaikan kendala yang berkaitan. Sebagai contoh formulasi VRPDPTW yang merupakan varian VRPTW dengan kendala tambahan berupa pengiriman dan pengambilan dengan *time windows* pada masing-masing pelanggan. Sehingga model matematika dari VRPDPTW adalah sebagai berikut.

$$\text{Min} \sum_{i \in P} \delta x_{0i}^k + \sum_{k \in K} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} d_{ij} x_{ij}^k$$

Batasan 1 : setiap permintaan pickup dilayani tepat satu kali dan permintaan pengiriman yang sesuai dilayani oleh kendaraan yang sama dalam rute yang sama,

$$\sum_{(i,j) \in A} \sum_{k \in K} x_{ij}^k = 1, \quad \forall i \in P$$

$$\sum_{j | (i,j) \in A} x_{ij}^k = \sum_{j | (n+i,j) \in A} x_{n+i,j}^k, \quad \forall (i,k) \in P \times K$$

Batasan 2. menjamin bahwa rute setiap kendaraan dimulai dan berakhir di depot

$$\sum_{j|(i,j) \in A} x_{ij}^k = \sum_{j|(j,i) \in A} x_{ji}^k, \quad \forall (i,k) \in P \cup D \times K$$

Batasan 3 : Total kendaraan yang digunakan tidak boleh melebihi jumlah seluruh kendaraan yang ada di depot.

$$\sum_{i \in P} x_{0i}^k \leq 1, \quad \forall k \in V$$

Batasan 4. Setiap kendaraan yang meninggalkan depot harus kembali ke depot.

$$\sum_{i \in P} x_{0i}^k = \sum_{i \in D} x_{i0}^k, \quad \forall k \in K$$

Batasan 5. Total pengiriman dan pengambilan barang pada setiap customer dalam satu rute tidak boleh melebihi kapasitas kendaraan.

$$\sum_{(i,j) \in A} \sum_{k \in K} Q_{ij}^k = 1, \quad \forall i \in P$$

$$\sum_{i \in P} \sum_{k \in K} Q_{0i}^k + \sum_{i \in D} \sum_{k \in K} Q_{i0}^k = 0; \quad \forall i \in P$$

$$Q_{ij}^k \leq Q \times x_{ij}^k, \quad \forall (i,j) \in A, \quad \forall k \in K$$

Batasan 6. pelayanan dilakukan berdasarkan batasan waktu

$$B_i^k - l_i + (l_i + s_i + t_{ij})x_{ij}^k \leq B_{ij}^k, \quad \forall (i,j) \in A, \forall k \in K$$

Batasan 7. setiap kendaraan harus kembali sebelum waktu akhir depot

$$e_1 \sum_{j|(i,j) \in A} x_{ij}^k \leq B_i^k \leq l_i \sum_{j|(i,j) \in A} x_{ij}^k, \quad \forall (i,k) \in N \times K$$

Batasan 8. Batasan nilai

$$x_{ij}^k \in \{0,1\}, Q_{ij}^k \geq 0, B_i^k \geq 0, \quad \forall (i,j) \in A, \forall k \in K$$

Keterangan :

$x_{ij}^k$  : variabel biner sama dengan 1 jika kendaraan  $k$  melakukan perjalanan dari lokasi permintaan  $i$  menuju lokasi permintaan  $j$ , dan 0 sebaliknya.

$B_i^k$  : waktu di mana kendaraan  $k$  memulai layanan di node  $i$

$Q_{ij}^k$  : beban kendaraan  $k$  pada busur  $(i,j)$ .

$d_{ij}$  : jarak antar titik

$t_{ij}$  : waktu antara lokasi dari titik  $i$  dan  $j$

$s_i$  : waktu layanan yang dibutuhkan oleh titik  $i$

$l_i$  : waktu terakhir di mana layanan dapat dimulai pada simpul  $i$

$P$  : himpunan permintaan pengambilan

$D$  : himpunan permintaan pengiriman

$A$  : himpunan dari arcs

$k$  : kendaraan

$K$  : himpunan kendaraan

$N$  : himpunan dari  $2n$  pelanggan

$V$  :  $N \cup \{0\}$  himpunan dari  $2n + 1$

Pada pemecahan masalah nyata, pemilihan formulasi matematika masalah nyata sangat diperlukan sebelum menyelesaikan masalah dengan algoritma.

### 3.3. Algoritma untuk menyelesaikan varian VRPTW

Untuk menyelesaikan varian VRPTW, dapat digunakan bermacam-macam algoritma antara lain: algoritma *Ant Colony optimization* (ACO), algoritma *Artificial Bee Colony* (ABC) dan algoritma *sequential insertion*. Algoritma ACO merupakan algoritma untuk menyelesaikan masalah optimasi yang terinspirasi dari perilaku semut dalam mencari makanan dari sarangnya. Prinsip dari ACO adalah semut meninggalkan suatu zat kimia khusus (feromon) pada jalur yang dilewatinya selama melakukan perjalanan. Feromon yang ditinggalkan pada tempat yang dilewati oleh semut ini menjadi pemandu bagi semut-semut lain dalam melakukan perjalanan. Pada algoritma ACO ada tiga tahapan, yaitu tahap inisialisasi, pembaruan feromon dan tahap optimalisasi [20]

Algoritma ABC merupakan algoritma yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah optimasi yang terinspirasi dari perilaku sekelompok lebah madu dalam mencari sumber makanan dan mengeksploitasi sumber-sumber makanan tersebut. Pada algoritma ABC lebah dibagi menjadi 3 kelompok yaitu *employed bee*, *onlooker bee* dan *scout bee*. Setiap kelompok lebah memiliki peran yang berbeda dalam pencarian sumber makanan. Peran *employed bee* mengeksploitasi sumber makanan, *onlooker bee* menunggu di sarang untuk berbagi informasi tentang sumber makanan yang dieksploitasi oleh *employed bee* dan *scout bee* berperan mencari sumber makanan baru secara *random*. Sumber makanan ini akan menjadi suatu pemodelan solusi atau himpunan rute, dengan membandingkan sumber makanan lain akan diperoleh kualitas madu berupa pemodelan nilai *fitness* dari solusi (himpunan rute) terkait [3]

Algoritma *sequential insertion* merupakan algoritma eksak yang dapat digunakan untuk menyelesaikan varian VRPTW. Prinsip dasar algoritma *sequential insertion* adalah inisialisasi dengan memilih kendaraan, memilih pelanggan pertama (*seed customer*) untuk membentuk rute awal. Selanjutnya menambahkan satu per satu pelanggan ke rute yang terbentuk. Proses penyisipan tiap pelanggan disyaratkan memberikan kriteria terbaik dengan batasan *time window* terpenuhi dengan total muatan kendaraan tidak melebihi kapasitas kendaraan dan total jarak yang paling minimal. Prosedur ini terus dilakukan berulang hingga semua pelanggan dimasukkan ke dalam rute [21]. Dalam keluarga algoritma eksak, algoritma *Sequential Insertion* lebih baik daripada algoritma eksak lain misalkan *Nearest Neighbor*.

Berikut ini diberikan contoh aplikasi pemecahan masalah optimalisasi distribusi dengan mengambil data contoh dari Solomon.

### 3.4. Contoh Aplikasi

Data yang digunakan untuk aplikasi adalah data uji standar dari Solomon (<http://www.vrp-rep.org/datasets/item/2014-0015.html>), dataset R211 (1 depot, 100 customer). Tersedia 25 kendaraan, dengan kapasitas 1000. Setiap customer memiliki demand, waktu buka, waktu tutup, dan semua memiliki service time yang sama. Permasalahan ini akan diselesaikan menggunakan aplikasi TSP-VRP [13]. Output aplikasi dapat dilihat pada Gambar 1-3.

Matrices Bobot (jarak dalam km)

Jarak simetris (AB = BA)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0	0	15.23	18.00	22.36	25.00	20.62	11.18	21.21	26.25	32.02	25.50	33.54	15.00	11.18	32.02	30.41	29.15	30.41	15.4
1	15.23	0	32.56	14.56	32.20	32.20	24.84	21.02	31.58	17.80	15.56	26.40	16.64	26.40	46.87	45.35	42.45	40.71	22.1
2	18.00	32.56	0	34.41	20.22	23.85	16.40	36.25	36.07	47.42	43.29	50.29	23.43	9.43	21.19	13.00	25.18	32.70	27.1
3	22.36	14.56	34.41	0	25.00	42.72	33.54	35.36	45.04	15.00	29.15	40.31	11.18	32.02	53.15	47.17	51.48	52.20	35.1
4	25.00	32.20	20.22	25.00	0	41.23	31.62	46.10	50.54	40.00	47.17	57.01	15.81	25.50	41.23	29.15	45.00	50.99	40.1
5	20.62	32.20	23.85	42.72	41.23	0	10.00	20.62	13.93	50.00	33.54	35.36	35.36	15.81	20.00	29.15	11.18	10.00	11.1
6	11.18	24.84	16.40	33.54	31.62	10.00	0	20.62	19.85	42.43	30.41	35.36	25.50	7.07	22.36	25.50	18.03	20.00	11.1
7	21.21	21.02	36.25	35.36	46.10	20.62	20.62	0	12.21	36.40	14.14	15.00	33.54	26.93	40.31	46.10	31.62	25.00	10.1
8	26.25	31.58	36.07	45.04	50.54	13.93	19.85	12.21	0	48.10	26.25	24.17	40.79	26.91	33.38	42.94	23.00	13.93	10.1
9	32.02	17.80	47.42	15.00	40.00	50.00	42.43	36.40	48.10	0	25.00	35.36	25.50	43.01	64.03	60.42	60.21	58.31	40.1
10	25.50	15.56	43.29	29.15	47.17	33.54	30.41	14.14	26.25	25.00	0	11.18	32.02	35.00	52.20	55.00	44.72	39.05	22.1
11	33.54	26.40	50.29	40.31	57.01	35.36	35.36	15.00	24.17	35.36	11.18	0	42.43	41.23	55.23	60.83	46.10	38.08	25.1
12	15.00	16.64	23.43	11.18	15.81	35.36	25.50	33.54	40.79	25.50	32.02	42.43	0	22.36	43.01	36.06	42.72	45.28	30.1
13	11.18	26.40	9.43	32.02	25.50	15.81	7.07	26.93	26.91	43.01	35.00	41.23	22.36	0	21.21	20.00	20.62	25.50	18.1
14	32.02	46.87	21.19	53.15	41.23	20.00	22.36	40.31	33.38	64.03	52.20	55.23	43.01	21.21	0	15.81	11.18	22.36	30.1
15	30.41	45.35	13.00	47.17	29.15	29.15	25.50	46.10	42.94	60.42	55.00	60.83	36.06	20.00	15.81	0	25.00	35.36	36.1
16	29.15	42.45	25.18	51.48	45.00	11.18	18.03	31.62	23.00	60.21	44.72	46.10	42.72	20.62	11.18	25.00	0	11.18	22.1
17	30.41	40.71	32.70	52.20	50.99	10.00	20.00	25.00	13.93	58.31	39.05	38.08	45.28	25.50	22.36	35.36	11.18	0	18.1
18	15.41	22.85	27.46	35.36	40.31	11.18	11.18	10.00	10.44	40.31	22.36	25.00	30.41	18.03	30.41	36.40	22.36	18.03	0

Gambar 1. Tabel jarak di aplikasi TSP-VRP untuk R211

VRPTW

Proses VRP

```

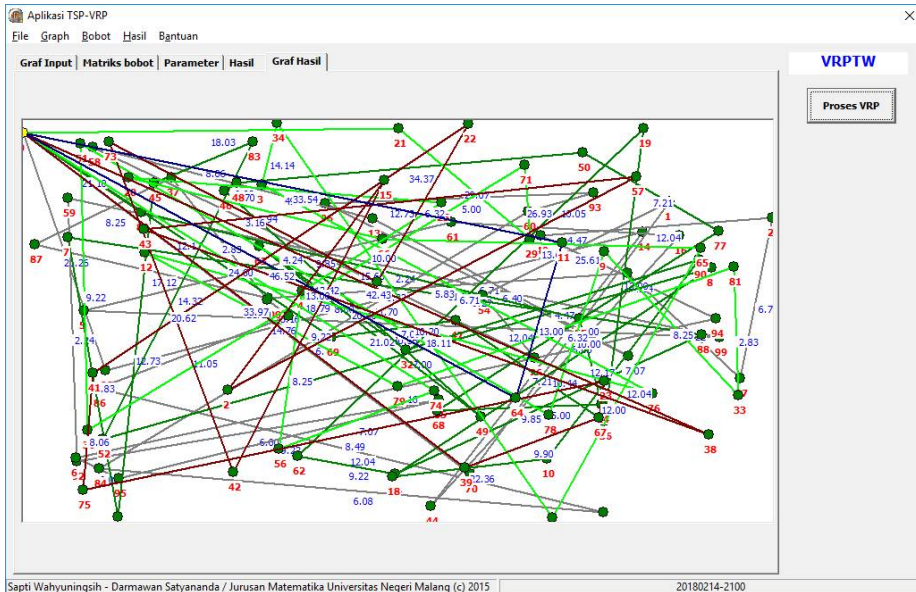
- Titik: 57, Rute: { 0-2-57-0 }, permintaan: 14.00, waktu: 302.39 menit, jarak: 47.4
- Titik: 15, Rute: { 0-15-2-57-0 }, permintaan: 22.00, waktu: 302.39 menit, jarak:
- Titik: 43, Rute: { 0-15-2-57-43-0 }, permintaan: 29.00, waktu: 536.35 menit, jar
- Titik: 42, Rute: { 0-42-15-2-57-43-0 }, permintaan: 34.00, waktu: 536.35 menit,
- Titik: 73, Rute: { 0-73-42-15-2-57-43-0 }, permintaan: 43.00, waktu: 536.35 meni
- Titik: 72, Rute: { 0-72-73-42-15-2-57-43-0 }, permintaan: 68.00, waktu: 536.35 m
- Titik: 75, Rute: { 0-75-72-73-42-15-2-57-43-0 }, permintaan: 86.00, waktu: 536.3
- Titik: 22, Rute: { 0-75-22-72-73-42-15-2-57-43-0 }, permintaan: 104.00, waktu: 5
- Titik: 41, Rute: { 0-75-41-22-72-73-42-15-2-57-43-0 }, permintaan: 109.00, waktu
- Titik: 23, Rute: { 0-23-75-41-22-72-73-42-15-2-57-43-0 }, permintaan: 138.00, wa
- Titik: 39, Rute: { 0-39-23-75-41-22-72-73-42-15-2-57-43-0 }, permintaan: 169.00,
- Titik: 67, Rute: { 0-39-67-23-75-41-22-72-73-42-15-2-57-43-0 }, permintaan: 194.
- Titik: 38, Rute: { 0-39-67-23-75-41-22-72-73-42-15-2-57-43-38-0 }, permintaan: 2

Kendaraan 5 - Rute 1:
Rute awal: { 0-11-0 }, permintaan: 12.00, waktu: 144.16 menit, jarak: 67.08 km
- Titik: 64, Rute: { 0-64-11-0 }, permintaan: 21.00, waktu: 206.12 menit, jarak: 5

** Rute akhir **
- Kendaraan 1 - Rute 1: { 0-98-14-44-16-61-5-99-59-92-85-95-6-94-40-28-27-53-89-87
- Kendaraan 2 - Rute 1: { 0-69-47-36-19-62-31-88-7-82-45-83-52-8-18-10-90-32-63-44
- Kendaraan 3 - Rute 1: { 0-21-29-71-30-51-78-9-33-81-79-12-76-3-34-35-65-66-20-28
- Kendaraan 4 - Rute 1: { 0-39-67-23-75-41-22-72-73-42-15-2-57-43-38-0 }, perminta
- Kendaraan 5 - Rute 1: { 0-64-11-0 }, permintaan: 21.00, waktu: 206.12 menit, jar
    
```

Gambar 2. Solusi akhir dalam bentuk rute, jarak, waktu





**Gambar 3.** Model graph untuk rute yang dihasilkan

Hasil akhir menunjukkan bahwa ada 5 rute yang dihasilkan:

- Kendaraan 1: { 0-98-14-44-16-61-5-99-59-92-85-95-6-94-40-28-27-53-89-87-37-100-91-86-17-84-60-93-96-97-13-58-26-54-1-70-0 }, permintaan: 541.00, waktu: 996.19 menit, jarak: 323.09 km
- Kendaraan 2: { 0-69-47-36-19-62-31-88-7-82-45-83-52-8-18-10-90-32-63-49-46-48-50-77-68-24-55-80-0 }, permintaan: 381.00, waktu: 992.50 menit, jarak: 361.25 km
- Kendaraan 3: { 0-21-29-71-30-51-78-9-33-81-79-12-76-3-34-35-65-66-20-25-4-56-74-0 }, permintaan: 305.00, waktu: 878.95 menit, jarak: 329.48 km
- Kendaraan 4: { 0-39-67-23-75-41-22-72-73-42-15-2-57-43-38-0 }, permintaan: 210.00, waktu: 599.07 menit, jarak: 208.08 km
- Kendaraan 5: { 0-64-11-0 }, permintaan: 21.00, waktu: 206.12 menit, jarak: 93.06 km

## 4. Kesimpulan

Permasalahan optimalisasi distribusi dapat dimodelkan dengan varian VRPTW. Identifikasi varian VRPTW diperlukan untuk pemecahan masalah yang berkembang bersesuaian dengan identifikasi masalah nyata yang bervariasi aplikasinya. Pengembangan VRPTW asli dengan varian VRP yang lain menghasilkan varian baru. Pengembangan VRPTW dengan tambahan Backhauls menghasilkan VRPBTW. Pengembangan CVRP dengan tambahan time windows menghasilkan varian VRPTW yaitu CVRPTW, pengembangan MTRVP dengan tambahan time windows memunculkan MTRVPTW. Pengembangan SDVRP dengan tambahan time windows memunculkan SDVRPTW, dan pengembangan Multi-

depot vehicle routing problem with pick-up and delivery (MDVRPPD) dengan tambahan time windows menghasilkan varian MDVRPPDTW. Identifikasi varian ini diperlukan untuk memodelkan masalah nyata yang bervariasi constraintnya. Setelah menentukan model dan formulasi matematika yang sesuai, pemecahkan masalah optimalisasi distribusi dengan menggunakan algoritma. Perhitungan hasil pemecahan masalah dengan melakukan input data, proses iterasi, dan hasil optimal dengan implementasi program TSP-VRP. Hasil kajian ini dapat digunakan mahasiswa yang sedang PKL di Industri yang menyelesaikan masalah penerapan teori graph khususnya optimalisasi distribusi.

## Ucapan Terima Kasih/acknowledgement

Tulisan ini merupakan bagian penelitian yang dibiayai oleh Universitas Negeri Malang melalui dana PNBPN tahun 2018. Kami mengucapkan terimakasih kepada Rektor Universitas Negeri Malang, Dekan FMIPA Universitas Negeri Malang, dan Ketua Jurusan Matematika FMIPA UM, Tim Peneliti, Kolega Dosen Jurusan Matematika FMIPA UM, dan semua pihak yang telah membantu dalam penulisan book chapter ini.

## Konflik Kepentingan

Tulisan ini tidak ada konflik kepentingan dengan penulis atau pihak lain.

## Catatan

Bagi pembaca yang menginginkan Implementasi Program TSP-VRP dapat menghubungi penulis melalui email:

[darmawan.satyananda.fmipa@um.ac.id](mailto:darmawan.satyananda.fmipa@um.ac.id) untuk kepentingan PKL atau keperluan akademik.

## Referensi

- [1] Leggieri V, Haouari M. A matheuristic for the asymmetric capacitated vehicle routing problem. *Discrete Applied Mathematics* 2018;234:139–50. doi:10.1016/j.dam.2016.03.019.
- [2] Afshar-Nadjafi B, Afshar-Nadjafi A. A constructive heuristic for time-dependent multi-depot vehicle routing problem with time-windows and heterogeneous fleet. *Journal of King Saud University - Engineering Sciences* 2017;29:29–34. doi:10.1016/j.jksues.2014.04.007.
- [3] Mingyong L, Erbao C. An improved differential evolution algorithm for vehicle routing problem with simultaneous pickups and deliveries and time windows. *Engineering Applications of Artificial Intelligence* 2010;23:188–95. doi:10.1016/j.engappai.2009.09.001.

- [4] Cardoso PJS, Schütz G, Mazayev A, Ey E, Corrêa T. A Solution for a Real-time Stochastic Capacitated Vehicle Routing Problem with Time Windows. *Procedia Computer Science* 2015;51:2227–36. doi:10.1016/j.procs.2015.05.501.
- [5] Zhang Z, Wei L, Lim A. An evolutionary local search for the capacitated vehicle routing problem minimizing fuel consumption under three-dimensional loading constraints. *Transportation Research Part B: Methodological* 2015;82:20–35. doi:10.1016/j.trb.2015.10.001.
- [6] Brito J, Martínez FJ, Moreno JA, Verdegay JL. An ACO hybrid metaheuristic for close-open vehicle routing problems with time windows and fuzzy constraints. *Applied Soft Computing* 2015;32:154–63. doi:10.1016/j.asoc.2015.03.026.
- [7] Li H, Lim A. Local search with annealing-like restarts to solve the VRPTW. *European Journal of Operational Research* 2003;150:115–27. doi:10.1016/S0377-2217(02)00486-1.
- [8] Malairajan RA, Ganesh K, Punniyamoorthy M, Qureshi MN. DINLIP: Model for Integrated Decision, Bound and Time Driven Capacitated Multi Echelon Supply Chain Network. *Procedia Engineering* 2012;38:2499–509. doi:10.1016/j.proeng.2012.06.295.
- [9] Khebbache S, Prins C, Yalaoui A, Reghioui M. Heuristics for Two-Dimensional Loading Capacitated Vehicle Routing Problem with Time Windows. *IFAC Proceedings Volumes* 2009;42:1544–9. doi:10.3182/20090603-3-RU-2001.0199.
- [10] Chu JC, Yan S, Huang H-J. A Multi-Trip Split-Delivery Vehicle Routing Problem with Time Windows for Inventory Replenishment Under Stochastic Travel Times. *Networks and Spatial Economics* 2017;17:41–68. doi:10.1007/s11067-015-9317-3.
- [11] Wang X, Wang M, Ruan J, Zhan H. The Multi-objective Optimization for Perishable Food Distribution Route Considering Temporal-spatial Distance. *Procedia Computer Science* 2016;96:1211–20. doi:10.1016/j.procs.2016.08.165.
- [12] Sawik B, Faulin J, Pérez-Bernabeu E. A Multicriteria Analysis for the Green VRP: A Case Discussion for the Distribution Problem of a Spanish Retailer. *Transportation Research Procedia* 2017;22:305–13. doi:10.1016/j.trpro.2017.03.037.
- [13] Wahyuningsih S, Satyananda, Darmawan, Hasanah, Dahliatul. Implementations of TSP-VRP Variants for Distribution Problem. *Global Journal* 2016;12:723–32.
- [14] Küçüköğlü İ, Öztürk N. An advanced hybrid meta-heuristic algorithm for the vehicle routing problem with backhauls and time windows. *Computers & Industrial Engineering* 2015;86:60–8. doi:10.1016/j.cie.2014.10.014.
- [15] Wahyuningsih S, Satyananda D. Improvement of CVRP and MTRP Solution using Local Search Method and its Implementation Using Google Map. *Proceedings of the 1st Annual International Conference on Mathematics, Science, and Education (ICoMSE 2017)*, vol. 128, Malang, Indonesia: Atlantis Press; 2018, p. 120–4. doi:10.2991/icomse-17.2018.21.
- [16] Korablev V, Makeev I, Kharitonov E, Tshukin B, Romanov I. Approaches to Solve the Vehicle Routing Problem in the Valuable Delivery Domain. *Procedia Computer Science* 2016;88:487–92. doi:10.1016/j.procs.2016.07.469.

- [17] Li J, Li Y, Pardalos PM. Multi-depot vehicle routing problem with time windows under shared depot resources. *Journal of Combinatorial Optimization* 2016;31:515–32. doi:10.1007/s10878-014-9767-4.
- [18] Mahmoudi M, Zhou X. Finding optimal solutions for vehicle routing problem with pickup and delivery services with time windows: A dynamic programming approach based on state–space–time network representations. *Transportation Research Part B: Methodological* 2016;89:19–42. doi:10.1016/j.trb.2016.03.009.
- [19] El-Sherbeny NA. Vehicle routing with time windows: An overview of exact, heuristic and metaheuristic methods. *Journal of King Saud University - Science* 2010;22:123–31. doi:10.1016/j.jksus.2010.03.002.
- [20] Sicilia J-A, Royo B, Larrodé E, Fraile A. A Decision Support System for a Long-distance Routing Problem based on the Ant Colony Optimization Metaheuristic. *Procedia - Social and Behavioral Sciences* 2014;111:1035–44. doi: 10.1016/j.sbspro.2014.01.138.
- [21] Joubert J, Claasen S. A sequential insertion heuristic for the initial solution to a constrained vehicle routing problem. *ORION* 2006;22. doi:10.5784/22-1-36.